

MỘT SỐ GỢI Ý
KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
LAISAC biên soạn.

I. BIẾN ĐỔI ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN.

Thí dụ : Giải phương trình : $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{8}$.

HD. Phương trình không có nghiệm $x = k\pi$, nhân 2 vế phương trình cho $\sin x$, phương trình trở thành

$$\sin 8x = \sin x \Rightarrow x = \begin{cases} x = m \cdot \frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{9} \end{cases} \quad (m \neq 7l, n \neq \frac{9h-1}{2} ; l, h \in \mathbb{Z}).$$

2. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -\frac{1}{2}$ (Nhân hai vế cho $\sin \frac{x}{2} (\neq 0)$).

3. $\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}$; 4. $\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x = \cos^3 4x$. (Sd ct nhân ba).

5. $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$; 6. $\sqrt{3} \sin 5x + 2 \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos x + 2 \cos 7x$. (ct biến đổi).

II. ĐẶT ẨN SỐ PHỤ.

Thí dụ 1. Giải phương trình: $\tan x + 2 \sin 2x = 3$.

HD. Đặt $t = \tan x$. Phương trình trở thành $t + \frac{4t}{1+t^2} = 3 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 3 = 0$.

Thí dụ 2. Giải phương trình : $\sin^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin x$.

HD. Phương trình viết lại: $\sin^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 3 \sin x \cdot \cos^2 x - \cos^3 x = 4 \sin x$.

Phương trình không có nghiệm thỏa $\cos x = 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x (\neq 0)$.

Thí dụ 3. Giải phương trình: $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$.

HD. Phương trình tương đương $1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x) = 3 \sin x \cdot \cos x$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau đây:

1) $\frac{1}{\sin x} + \sin x + \frac{1}{\sin^2 x} + \sin^2 x = 4$;

2) $\frac{2}{\sin^2 x} + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 4 = 0$.

3) $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$;

4) $2 \cos^3 x + \sin x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x = 0$.

5) $\sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x$;

6) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos x - \sin x$.

7) $\sqrt{2 \sin x - 1} = 2 - 3 \sin x$;

8) $\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cdot \cos^2 x}$

9) $\sin 2x + \sqrt{2} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1$;

10) $2\sqrt{2}(\cos^3 x + \sin^3 x) = \tan x + \cot x$.

III. ĐẶT THỪA SỐ CHUNG.

Thí dụ 1. Giải phương trình : $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \cot x - \cos 2x$.

HD: ĐK $\sin x \neq 0$. Phương trình tương đương $(\sin x - \cos x) \left(1 + \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{\sin x} - \sin x - \cos x \right) = 0$.

Thí dụ 2. Giải phương trình : $\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

HD: Biến tích thành tổng, đặt thừa số chung phương trình trở thành :

$\cos 2x \cdot (\cos x + \sin x) - \sin x \cdot (\cos x + \sin x) = 0$.

Chú ý : Các số hạng chứa thừa số $(\sin x + \cos x)$ là : $\cos 2x, \sin^3 x + \cos^3 x; \cos^4 x - \sin^4 x$

$$\cos 3x - \sin 3x; 1 + \operatorname{tg} x; \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x \dots$$

Bài tập đề nghị. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x &= 0; & 2) \operatorname{cotg} x + \sin x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) &= 4. \\ 3) \sin^3 x + \cos^3 x &= \cos 2x; & 4) \cos^2 x (1 + \cos x) + \sin^2 x (1 + \sin x) &= 2 \cos^2 x. \\ 5) (2 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) &= 3 - 4 \cos^2 x; & 6) \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} 2x &= \sin 3x; \\ 7) 2 \sin 3x - \frac{1}{\sin x} - 2 \cos 3x + \frac{1}{\sin x} &; & 8) (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) &= 1 + \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

IV. TỔNG HỢP. (Thông thường ta sử dụng các công thức hạ bậc, biến đổi...).

Thí dụ 1. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1.$

HD: Hạ bậc dẫn đến phương trình tương đương $\sin 2x + \cos 2x = 1.$

Thí dụ 2. Giải phương trình: $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin \left(\frac{17\pi}{2} + 10x \right).$

HD: Hạ bậc, biến tổng thành tích đưa về phương trình: $\cos 10x (\cos 6x + 1) = 0.$

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) \sin^4 x + \cos^4 x &= \frac{1 - \cos 6x}{2}; & 2) 1 + \sin x \sin \frac{x}{2} - \sin^2 x \cos \frac{x}{2} &= 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right). \\ 3) \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) &= \frac{1}{2} (\sin x + 1); & 4) 2 \cos^6 x + \sin^4 x + \cos 2x &= 0; \\ 5) \cos 2x + 4 \sin^4 x &= 8 \cos^6 x; & 6) \cos^4 x + \sin^4 x - 2 \left(\cos^6 \frac{x}{2} + \sin^6 \frac{x}{2} \right) + 1 &= 0 \\ 7) \cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{4} &= 0; & 8) \cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x &= 0. \\ 9) \frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} &= 0; & 10) 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x &= \cos 3x. \end{aligned}$$

V. PHƯƠNG PHÁP KHÔNG MẪU MỤC.

* **ĐÁNH GIÁ HAI VẾ.**

Thí dụ 1. Giải phương trình: $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x.$

HD: Vế trái: $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4 \sin^2 3x \cdot \sin^2 2x \leq 4$; vế phải: $5 + \sin 3x \geq 4.$

Phương trình trở thành $\begin{cases} \sin^2 3x \cdot \sin^2 2x = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 3x = -1.$

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x &= 3; & 2) \sin^{2007} x + \cos^{2007} x &= 1. \\ 3) \sqrt{3 + \cos x} &= 2 + \sin^2 x; & 4) \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} &= 2(1 + \sin^2 x). \\ 5) \sin 3x \cdot \sin x &= 1; & 6) \sin x + \cos x &= \sqrt{2}(2 - \sin 3x). \end{aligned}$$

* **TỔNG BÌNH PHƯƠNG.**

Thí dụ 1. Giải phương trình: $2 + \sin^2 x - \sin^2 3x = 2 \cos 3x.$

HD: Phương trình tương đương $(\cos 3x - 1)^2 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = 1.$

Bài tập đề nghị: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) 2 \operatorname{tg}^2 x - 2(\sin 2x + 1) \operatorname{tg} x + 1 - \sin^2 x &= 0; & 2) \cos^4 x - \cos 2x + 2007 \cdot \sin^2 \frac{x}{3} &= 0. \\ 3) \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x &= \sin x \cdot \sin^2 3x; & 4) \sin 2x (\sin 2x - 2) + 4 \cos x (\cos x + \sqrt{2}) + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Lưu ý: Khi giải phương trình dạng phân thức, chứa hàm tag , cotg , căn thức... ta nhớ đặt điều kiện và chọn nghiệm thích ứng. Tham khảo thêm tìm nghiệm trong đoạn, khoảng cho trước và dạng phương trình có chứa tham số.