Trong các phần trước chúng ta đã đi xét một số dạng hệ mà có đường lối giải tổng quát. Trong phần này chúng ta đi xét một số hệ mà không có đường lối giải tổng quát. Để tìm lời giải của những hệ này

1. Phương pháp thế:

Nội dung của phương pháp này từ một phương trình hoặc kết hợp hai phương trình của hệ ta biểu diễn ẩn này qua ẩn kia hoặc một biểu thức này qua biểu thức khác và thế vào phương trình còn lại chuyển về phương trình một ẩn (có thể là ẩn phụ). Mục đích của việc làm này là giảm số ẩn. Tùy thuộc vào đặc điểm của bài toán mà ta có những cách biến đổi phù hợp. Trong phương pháp này ta cần lưu ý một số dấu hiệu sau.

- Nếu trong hệ phương trình có một phương trình bậc nhất đối với một ẩn thì ta rút ẩn đó qua ẩn kia thế vào phương trình còn lại và chuyển về giải phương trình một ẩn.
- Với hai số thực bất kì $x \neq 0; y$ ta luôn có $y = tx$ (t là số thực cần tìm). Với cách làm này ta sẽ được hệ về phương trình một ẩn t.
- Phương trình $f(x;y) = f(y;x)$ luôn có một cặp nghiệm $x = y$ (các bạn thử giải thích vì sao?), do đó ta luôn phân tích phương trình đã cho về dạng: $(x-y)g(x;y) = 0$.
- Trong hệ phương trình nếu biểu thức $u(x)$ xuất hiện ở hai phương trình thì ta có thể đặt $t = u(x)$ để làm đơn giản hình thức bài toán.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3y = 16 & (1) \\ 3x + y = 8 & (2) \end{cases}$.

Giải :

Ta thấy (2) là một phương trình bậc nhất hai ẩn nên ta rút ẩn này qua ẩn kia.

Từ phương trình (2) $\Rightarrow y = 8 - 3x$ thay vào phương trình (1) ta được:

$x^3(8-3x) = 16 \Leftrightarrow 3x^4 - 8x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(3x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy hệ có nghiệm là $x = y = 2$.

Chú ý : Ở cách giải trên ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$, đồng thời từ hai phương trình ta có nhận xét $x, y > 0$ và ở phương trình (2) VT là $3x + y$, phương trình (1) có tích x^3y. Điều này gợi cho chúng ta liên tưởng đến BĐT Cauchy. Ta có cách giải khác như sau:

Ta thấy nếu hệ có nghiệm (x;y) thì $x, y > 0$.

Áp dụng bđt Cauchy ta có: $3x + y = x + x + x + y \geq 4\sqrt[4]{x^3y} = 8$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(1+x^2)=x\left(1+y^2\right) & (1) \\ x^2+3y^2=1 & (2) \end{cases}$.

Giải:

Dễ thấy phương trình (1) có cặp nghiệm $x=y$, do đó ta biến đổi phương trình (1) của hệ ra thừa số $(x-y)$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x-y+xy(y-x)=0 \Leftrightarrow (x-y)(1-xy)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=1 \end{array}\right.$.

* $x=y \Rightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$.

* $x=\frac{1}{y} \Rightarrow 3y^4-y^2+1=0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là: $x=y=\pm\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} & (1) \\ 2y=x^3+1 & (2) \end{cases}$.

Giải: $xy \neq 0$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x-y+\frac{x-y}{xy}=0 \Leftrightarrow (x-y)(1+\frac{1}{xy})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-\frac{1}{x} \end{array}\right.$.

* $x=y$ thay vào (2), ta được:

$x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=1; x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

* $y=-\frac{1}{x}$ thay vào (2), ta được: $x^4+x+2=0 \Leftrightarrow (x^2-\frac{1}{2})+(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}=0$ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $x=y=1; x=y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x+y}=\sqrt[3]{x+y}\\ \sqrt{x-y}=\sqrt[3]{x-y-12}\end{cases}$.

Giải: ĐK: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}$.

Ta thấy mỗi phương trình của hệ là phương trình một ẩn $x+y$ và $x-y$. Do đó điều mà chúng ta nghĩ tới là đi giải từng phương trình tìm $x+y$ và $x-y$, khi đó ta có được hệ phương trình mới đơn giản hơn nhiều.

Để đơn giản về mặt hình thức ta đặt $a=x+y,\ b=x-y\Rightarrow a,b\ge 0$ ta có hệ :

$$\begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt[3]{a}\\ \sqrt{b}=\sqrt[3]{b-12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3=a^2\\ b^3=(b-12)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\ \text{V}\ a=1\\ b=4\end{cases}.$$

*Với $\begin{cases}a=0\\ b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\ x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$

* Với $\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(2;-2),\ \ (\frac{5}{2};-\frac{3}{2})$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 & (1)\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4 & (2)\end{cases}$.

Giải: ĐK : $x\ge|y|$

Vì (1) trong căn chỉ chứa lũy thừa bậc 1 đối với x,y còn (2) thì trong căn chứa lũy thừa bậc 2 đối với x,y nên suy nghĩ đầu tiên là ta sẽ bình phương hai vế phương trình (1) để đưa về hai phương trình đồng bậc.

Từ (1) $\Rightarrow\sqrt{x+y}>\sqrt{x-y}\Rightarrow y>0$.

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x^2-y^2}=2\\ \sqrt{x^2+y^2}=4-\sqrt{x^2-y^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=x-2\\ \sqrt{x^2+y^2}=6-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 6\\ x^2-y^2=(2-x)^2\\ x^2+y^2=(6-x)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 6 \\ 2x^2 = (2-x)^2 + (6-x)^2 \\ x^2 + y^2 = (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 6 \\ 2x^2 = 40 - 16x + 2x^2 \\ y^2 = 36 - 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(\frac{5}{2}; \sqrt{6})$.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$.

Giải:

Đặt $a = x + y$ từ (1) $\Rightarrow x^2 + 1 = y(4-a)$ thế vào (2), ta có:

$y(4-a)(a-2) = y \Leftrightarrow y(a^2 - 6a + 9) = 0 \Leftrightarrow y = 0;\ a = 3$

* Với $y = 0$ thay vào (1) ta thấy hệ vô nghiệm.

* Với $a = 3 \Leftrightarrow x + y = 3$ thay vào hệ ta có:

$$x^2 + 1 = y = 3 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right..$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y) = (1;2),\ (-2;5)$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y & (1) \\ x^2 - 3 = 3(y^2+1) & (2) \end{cases}$.

Giải:

Cách 1: Từ (2) $\Rightarrow x^2 = 3(y^2+2)$ (3) thay vào (1) ta được :

$$x^3 - 8x = y(y^2+2) = y\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2 - xy - 24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \end{array}\right..$$

* Với $x = 0$ thay vào (3) ta có: $y^2 + 2 = 0$ vô nghiệm.

* Với $y = \dfrac{3x^2 - 24}{x}$ thay vào (3) ta được: $x^2 = 3\left(\dfrac{3x^2 - 24}{x}\right)^2 + 6$

$$\Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có bốn cặp nghiệm: $(x;y)=(\pm 3;\pm 1),\quad (\pm\sqrt{\frac{96}{14}};\mp\frac{\sqrt{78}}{13})$.

Cách 2: Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x^3-8x=t^3x^3+2tx \\ x^2-3=3(t^2x^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-t^3)=2t+8 \\ x^2(1-3t^2)=6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-t^3}{1-3t^2}=\frac{t+4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(1-t^3)=(t+4)(1-3t^2)\Leftrightarrow 12t^2-t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3} \\ t=-\frac{1}{4} \end{array}\right..$$

$$*\ \ t=\frac{1}{3}\Rightarrow \begin{cases} x^2(1-3t^2)=6 \\ y=\frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 1 \end{cases}.$$

$$*\ \ t=-\frac{1}{4}\Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y=\mp\frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}.$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x^2-2x|+y=1 & (1) \\ x^2+|y|=1 & (2) \end{cases}$.

Giải: Từ (2) $\Rightarrow -1\le x,y\le 1$.

Ta xét các trường hợp sau

* $y\ge 0\Rightarrow (1)\Leftrightarrow x^2+y=1\Leftrightarrow y=1-x^2$ thay vào (2) ta được:

$$|x^2-2x|+1-x^2=1\Leftrightarrow |x^2-2x|=x^2 \Leftrightarrow x^2(x-2)^2=x^4 \Leftrightarrow x^2(-4x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1 \\ x=1\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

* $y<0\Rightarrow (1)\Leftrightarrow y=x^2-1$ thay vào (2) ta có:

$$|x^2-2x|+x^2-1=1\Leftrightarrow |x^2-2x|=2-x^2 \Leftrightarrow x^3-2x^2+1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có ba cặp nghiệm $(x;y)=(0;1),\ (1;0),\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y & (2) \end{cases}$.

Giải: ĐK : $x+y>0$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow x^2+y^2+\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{x+y}-1=0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{(x^2+y^2)(x+y)-(x^2+y^2)}{x+y}+x+y-1=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+1)=0$.

$\Leftrightarrow x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$ (Do $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}>0$) Thay vào (2), ta được:

$x^2-(1-x)=1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=0 \\ x=-2\Rightarrow y=3 \end{array}\right.$.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(1;0),\ (-2;3)$.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 \end{cases}$ (***HSG Quốc Gia – 2001***).

Giải:

Cách 1: Đặt $t=y-x \Leftrightarrow y=x+t$ ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{7x+y}=3-t \\ \sqrt{2x+y}=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+t=(3-t)^2 \\ 3x+t=(2+t)^2 \\ -2\le t\le 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3t-8t=3(3-t)^2-8(2+t)^2 \\ -2\le t\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+9t+1=0 \\ -2\le t\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow t=\dfrac{-9+\sqrt{77}}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{(t+2)^2-t}{3}=10-\sqrt{77} \\ y=t+x=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \end{cases}$ là nghiệm của hệ đã cho.

Cách 2: Đặt $u=\sqrt{7x+y},\ v=\sqrt{2x+y}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} u+v=5 \\ v=2+y-x \end{cases}$.

Mặt khác $u^2-v^2=5x \Rightarrow (u-v)(u+v)=5x \Rightarrow u-v=x \Rightarrow v=\dfrac{5-x}{2}$ (Do $u+v=5$).

Từ đó $\Rightarrow \dfrac{5-x}{2}=2+y-x \Rightarrow y=\dfrac{1+x}{2}$ thay vào hệ ta có được: $\sqrt{2x+\dfrac{1+x}{2}}=\dfrac{5-x}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ 10x+2=(5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ x^2-20x+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=10-\sqrt{77} \Rightarrow y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}$.

Thay vào hệ ta thấy thỏa mãn. Vậy hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=10-\sqrt{77} \\ y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$ (***HSG Quốc Gia – 1996***).

Giải: ĐK : $x,y\ge 0$. Vì x=0 hay y=0 không là nghiệm của hệ nên ta có:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (1) \\ \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2) \end{cases}$. Nhân (1) với (2) ta được:

$\dfrac{1}{x+y}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)=\dfrac{1}{3x}-\dfrac{8}{7y} \Leftrightarrow 21xy=(x+y)(7y-24x)$

$\Leftrightarrow 24x^2+38xy-7y^2=0 \Leftrightarrow (6x-y)(4x+7y)=0 \Leftrightarrow y=6x$ (Do $x,y>0$)

Thay vào (1) ta có: $1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2}{\sqrt{7x}} \Leftrightarrow x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y=6x=\dfrac{22+8\sqrt{7}}{7}$

Thử lại hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có cặp nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21} \\ y=\dfrac{22+8\sqrt{7}}{7} \end{cases}$.

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$ (***HSG QG – 2004***) .

Giải:

Cách 1: Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ nên

Từ (1) $\Rightarrow y^2=-\dfrac{x^3+49}{3x}$ (*) thế vào phương trình (2) ta được:

$$x^2-8xy-\frac{x^3+49}{3x}=8y-17 \Leftrightarrow 24y(x^2+x)=2x^3+51x^2-49$$

$$\Leftrightarrow 24xy(x+1)=(x+1)(2x^2+49x-49) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\dfrac{2x^2+49x-49}{24x} \end{array}\right.$$

* $x=-1$ thế vào (*) $\Rightarrow y=\pm 4$.

* $y=\dfrac{2x^2+49x-49}{24x}$ thế vào (*), ta có:

$$-\frac{x^3+49}{3x}=\left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2 \Leftrightarrow -192x(x^3+49)=(2x^2+49x-49)^2$$

Biến đổi rút gọn ta được:

$4x^4+4x^3+45x^2+94x+49=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(4x^2-4x+49)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(-1;\pm 4)$.

Cách 2: Nhân phương trình (2) với 3 rồi cộng với (1) theo từng vế ta được:

$$x^3+3x^2+3xy^2-24xy+3y^2=24y-51x-49$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+3y^2(x+1)-24y(x+1)+48(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2+3y^2-24y+48\right)=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Thế $x=-1$ vào phương trình (1) ta có: $y^2=16 \Leftrightarrow y=\pm 4$.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm $(x;y)=(-1;\pm 2)$.

Cách 3: Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} x^3(1+3t^2)=-49 \\ x^2(1-8t+t^2)=x(8t-17) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\dfrac{-49}{1+3t^2}=\dfrac{-49}{49+3(t^2-16)}=\dfrac{-49}{49+3a} \\ x=\dfrac{8t-17}{t^2-8t+1}=\dfrac{8t-17}{(t^2-16)-(8t-17)}=\dfrac{b}{a-b} \end{cases}$$

(Trong đó ta đã đặt: $a=t^2-16;\ \ b=8t-17$).

$$\Rightarrow \frac{-49}{49+3a}=\frac{b^3}{(a-b)^3} \Leftrightarrow 49\left(b^3+(a-b)^3\right)+3a=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[49\left(b^2-b(a-b)+(a-b)^2\right)+3\right]=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow t^2=16.$$

Thế $t^2=16$ vào hệ $\Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=\pm 4$.

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{1-y}=\sqrt{1-2x} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3y=16 \\ 3x+y=8 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} (\dfrac{x}{y})^2+(\dfrac{x}{y})^3=12 \\ (xy)^2+xy=6 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x}{y}}+\sqrt{\dfrac{2y}{x}}=3 \\ x-y+xy=3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=3 \\ x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=3 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3(x-y) \\ x^2+xy+y^2=7(x-y)^2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=\dfrac{85}{3} \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{13}{3} \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y} \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y-4=0 \\ 2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \end{cases}$