Bài giảng số 18

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Cũng giống như các bài toán về hàm số, các bài toán về phương trình lượng giác là một câu hỏi bắt buộc có mặt trong mọi đề thi về môn Toán vào các trường Đại học, Cao đẳng các năm 2002–2009.

Bài giảng này đề cập đến các phương pháp giải phương trình lượng giác tùy theo dạng của chúng.

Lược đồ chung để giải các phương trình lượng giác được tiến hành như sau:

1/ Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa. Ngoài các điều kiện thông thường như đối với mọi phương trình khác (thí dụ như điều kiện về mẫu số, các biểu thức trong căn của các căn bậc chẵn có mặt trong phương trình...), riêng đối với phương trình lượng giác cần chú ý đặc biệt đến các điều kiện sau:

+ để tan x có nghĩa, điều kiện là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

+ Để cot x có nghĩa, điều kiện là $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2/ Giải phương trình bằng các lược đồ quen thuộc.

3/ So sánh nghiệm tìm được với điều kiện đặt ra để loại bỏ đi các nghiệm ngoại lai.

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

1. Dạng phương trình: asin x + bcos x = 2 (a, b ≠ 0)

2. Điều kiện có nghiệm: Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

3. Cách giải: Có hai cách giải phương trình này:

Phương pháp 1: Đưa phương trình về dạng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (1)$$

Đặt $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\alpha$.

Phương pháp 2: Xét hai khả năng sau:

+ Nếu $b + c = 0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 0$ thỏa mãn phương trình

$\Rightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ thuộc vào tập hợp nghiệm.

+ Nếu $b+c \neq 0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} \neq 0$, khi đó đặt $\tan\frac{x}{2} = t$.

Áp dụng công thức $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, ta quy phương trình đã cho về phương trình bậc 2 đối với t, sau đó giải $\tan\dfrac{x}{2} = t$

Chú ý:

Khi sử dụng phương pháp này người ta thường hay quên xét khả năng $\cos\dfrac{x}{2} = 0$, mà đặt ngay $\tan\dfrac{x}{2} = t$, khi đó sẽ dẫn đến khả năng có thể mất nghiệm của phương trình.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)

Giải phương trình lượng giác: $(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2})^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ (1).

<u>Giải</u>

Ta có (1) $\Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)

Giải phương trình lượng giác:

$$\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3} \ (1).$$

<u>Giải</u>

Điều kiện để (1) có nghĩa là $\sin x \neq 1$ và $\sin x \neq \dfrac{1}{2}$ (2).

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Để ý rằng nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ bị loại (vì không thỏa mãn (2)), và rõ ràng $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ thỏa mãn (2) nên nghiệm của (1) là $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét:

Mặc dù ở đây (1) không có dạng asinx + bcosx = c, nhưng thực chất cách giải (3) là sử dụng phương pháp của cách giải phương trình asinx + bcosx = c, nên ta sắp xếp nó vào dạng này.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)

Giải phương trình lượng giác:

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right) \quad (1).$$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x - 2\sin^3 x = 2\cos 4x$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \pm 4x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)

Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0 \quad (1)$.

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \left(\sin 5x + \sin x\right) - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Thí dụ 5:

Giải phương trình $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2 \quad (1)$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

$$\Leftrightarrow 4-2\frac{1+\cos 4x}{2}+\sqrt{3}\sin 4x=2 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}\cos 4x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Thí dụ 6: Giải phương trình: $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$ (1).

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{2}(1+\cos 2x)=3+\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x+(\sqrt{2}-1)\cos 2x=3-\sqrt{2}$$

Ta có: $\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2=5-2\sqrt{2}<11-6\sqrt{2}=\left(3-\sqrt{2}\right)^2$.

Vậy (1) vô nghiệm (vì vi phạm điều kiện $a^2+b^2\geq c^2$)

Thí dụ 7: Giải phương trình: $x+\sqrt{13-x^2}+x\sqrt{13-x^2}=11$.

Giải

+ Nếu $\cos\frac{x}{2}=0$ thì $\sin x=0$ và $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1$, khi đó không thỏa mãn phương trình.

Vậy $\cos\frac{x}{2}\neq 0$.

+ Vì $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, đặt $t=\tan\frac{x}{2}$, từ đó

$$(1) \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)\frac{2t}{1+t^2}+\left(1-\sqrt{3}\right)\frac{1-t^2}{1+t^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \left(3+\sqrt{3}\right)t^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)t+1+\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ t=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan\frac{x}{2}=-\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

Nhận xét: Nếu dùng phương pháp 1/, sau khi biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin x + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

Việc giải (2) bằng phương pháp 1 về nguyên tắc thì làm được, nhưng để ra đáp số như trên thì rất khó khăn. Vậy với thí dụ này, phương pháp 2 là thích hợp.

Thí dụ 8:

Tìm m để phương trình: $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ có nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Giải

Lập luận như thí dụ 7, thì $\cos\frac{x}{2} \neq 0\ \forall m$, vì thế đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ thì phương trình đã cho có dạng (sau khi biến đổi):

$$f(t) = t^2 - 4t + 1 = 2m \qquad (1)$$

$$\text{Do } x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -1 \le t \le 1 \qquad (2)$$

Bài toán đã cho trở thành: Tìm m để hệ (1) (2) có nghiệm.

Ta có f'(t) = 2t – 4 và có bảng biến thiên sau:

t	-1		1	2
$f'(t)$		$-$		0
$f(t)$	6	$\searrow$	-2	

Từ đó suy ra (1) và (2) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \le 2m \le 6 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$.

Đó là các giá trị cần tìm của m.

Nhận xét:

Với thí dụ này phương pháp 2 tỏ rõ hiệu lực hơn hẳn phương pháp 1.

Qua các thí dụ trên các bạn chắc đã tự rút ra kết luận khi nào nên sử dụng phương pháp 1, hoặc phương pháp 2.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC 2, BẬC 3 ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

1. Dạng phương trình

a/ Phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với sinx và cosx có dạng

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x + d = 0.$$

b/ Phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với sinx và cosx có dạng

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0.$$

Cùng với b/ ta xét phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với sinx và cosx (dạng suy rộng) sau: $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x + (m\sin x + n\cos x) = 0$

2. Cách giải

– Kiểm tra cos x = 0 có phải là nghiệm hay không?

– Sau đó xét tiếp trường hợp $\cos x \neq 0$. Đặt $\tan x = t$.

Bằng cách chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ với phương trình đẳng cấp bậc hai và cho $\cos^3 x$ với phương trình đẳng cấp bậc 3, ta quy về phương trình bậc hai (hoặc bậc ba) đối với t. Tìm được t, ta giải tiếp phương trình cơ bản: $\tan x = t$ ta sẽ đi đến nghiệm x cần tìm.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh khối B – 2009)

Giải phương trình lượng giác:

$$\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x \ (1).$$

Giải

Nếu $\cos x=0$ thì từ (1) ta có $\sin^3 x = 0$ và đó là điều vô lý, nên $\cos x \neq 0$.

Do $\cos x \neq 0$, nên chia cả hai vế của (1) cho $\cos^3 x$, ta có

$$\tan^3 x - \sqrt{3} - \tan x + \sqrt{3}\tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \left(\tan x + \sqrt{3}\right)\left(\tan^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3} \\ \tan x = 1 \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Thí dụ 2:

Giải phương trình $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$ (1).

Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (2).

Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x + \cos x) = 3\sin x\cos x(\cos x - \sin x) + 3\sin x$ (3).

Do điều kiện (2) nên chia cả hai vế của (3) cho $\cos^3 x$ và có

$$\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x + 3\tan^2 x - 3\left(1 + \tan^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)\left(\tan^2 x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \quad (4).$$

Rõ ràng (4) thỏa mãn (2), nên là nghiệm của (1).

Thí dụ 3:

Giải phương trình: $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$ (1).

Giải

Ta có $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^3=4\cos^3 x-3\cos x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^3 x+\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-\cos x=0 \quad (2)$$

Rõ ràng cosx $\neq 0$ (vì nếu cosx = 0 $\Rightarrow$ sinx = 0: vô lí)

Vì thế chia cả hai vế của (2) cho $\cos^3 x$ và có:

$$\sqrt{3}\tan^3 x+1+\sqrt{3}\tan x-3\tan^2 x-1-\tan^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(\sqrt{3}\tan^2 x-4\tan x+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi.\end{array}\right., \ k\in\mathbb{Z}$$

Thí dụ 4:

Giải phương trình: $\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0$ (1).

Giải

+ Nếu cosx=0, từ (1) ta có hệ:

$$\begin{cases}\cos x=0\\ \sin x-4\cos^3 x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=0;\sin x=\pm 1\end{cases}$$

Từ (2) (3) suy ra vô lí. Vậy cosx $\neq 0$

+ Do cos x $\neq 0$, nên chia cả hai vế của (1) cho $\cos^3 x$ và có

$\tan x(1+\tan^2 x)+1+\tan^2 x-4\tan^3 x=0 \Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan^2 x-\tan x-1=0$

$\Leftrightarrow (\tan x-1)(3\tan^2 x+2\tan x+1)=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Thí dụ 5:

Cho phương trình: $\sin^2 x+(2m-2)\sin x\cos x-(m+1)\cos^2 x=m$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Giải

+ Nếu cosx = 0, thì từ (1) ta có: $\begin{cases}\cos x=0 & (2)\\ \sin^2 x=m & (3)\end{cases}$

Hệ (2) (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ m = 1. Vậy m =1 là một giá trị cần tìm.

+ Nếu cosx $\neq 0$. Khi đó chia cả hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ và

$$(1) \Leftrightarrow \tan^2 x+(2m-2)\tan x-(m+1)=m+m\tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\tan^2 x-2(m-1)\tan x+2m+1=0 \ (2)$$

Dễ thấy $\Delta' = -m^2-m+2$, vậy $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2\leq m<1$ (do $m\neq 1$).

Kết hợp lại: $-2\leq m\leq 1$ là các giá trị cần tìm của tham số m.

Thí dụ 6: Cho phương trình: $m\cos^2 x-4\sin x\cos x+m-2=0$ (1). Tìm m để (1) có nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Khi $0 < x < \frac{\pi}{4}$, thì cosx > 0 (nói riêng cosx ≠ 0). Vì thế sau khi chia cả hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ và rút gọn, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m(\tan^2 x + 2) = 2\tan^2 x + 4\tan x + 2 \Leftrightarrow \frac{2\tan^2 x + 4\tan x + 2}{\tan^2 x + 2} = m$$

Khi $0 < x < \frac{\pi}{4}$, thì $0 < \tan x < 1$. Vậy sau khi đặt t = tanx bài toán trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = \dfrac{2t^2 + 4t + 2}{t^2 + 2} = m & (2) \\ 0 < t < 1 & (3) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-4(t^2 - t - 2)}{(t^2 + 2)^2}$ và có bảng biến thiên sau:

t	−1	0		1	2
f'(t)			+		
f(t)		1	↗	$\frac{8}{3}$	

Vậy $1 < m < \frac{8}{3}$ là các giá trị cần tìm của tham số m.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SIN X VÀ COS X

1. Dạng của phương trình

$$a(\sin x + \cos x)^k + b(\sin x \cos x)^m + c = 0 \qquad (1)$$

hoặc $$a(\sin x - \cos x)^k + b(\sin x \cos x)^m + c = 0 \qquad (2).$$

2. Cách giải

– Với phương trình (1) dựa vào hệ thức:

$$\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2},$$

sau đó dùng phép thay biến t = sinx + cosx ($-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$).

– Với phương trình (2) dựa vào hệ thức

$$\sin x \cos x = \frac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{2},$$

sau đó dùng phép thay biến t = sinx – cosx ($-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$).

Như vậy ta đã quy được (1) (hoặc (2)) về dạng phương trình đại số của t. Sau đó giải phương trình sinx+cosx = t để suy ra đáp số cần tìm.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)

Giải phương trình: $(1 + \sin^2x)\cos x + (1 + \cos^2x)\sin x = 1 + \sin 2x$ (1).

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sin^2x\cos x + \sin x\cos^2x + \sin x + \cos x = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x\cos x + 1 - \sin x - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (2) \\ \sin x\cos x + 1 - (\sin x + \cos x) = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Dễ thấy (2) $\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Đặt sin x + cos x = t ($\sqrt{2} \le t \le 2$), khi đó (2) có dạng

$$\frac{t^2-1}{2} + 1 - t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (1) là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Thí dụ 2:

Giải phương trình: $1 + \sin^3x + \cos^3x = \dfrac{3}{2}\sin 2x$ (1).

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(\sin^2x - \sin x\cos x + \cos^2x) = 3\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) - 3\sin x\cos x = 0$ (2)

Đặt t = sinxcosx ($-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$). Khi đó (2) có dạng

$$1 + t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) - 3\frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2t - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & \\ t = -1 - \sqrt{6} < -\sqrt{2} & \text{(loại)} \\ t = -2 + \sqrt{6} > \sqrt{2} & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Thí dụ 3:

Giải phương trình $1+\tan x = 2\sqrt{2}\sin x$ (1).

Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (2).

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 1+\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x$ (3)

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$). Khi đó (3) có dạng:

$$t - 2\sqrt{2}\frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} + t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

+ Nếu $t = \sqrt{2}$, ta có $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

+ Nếu $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ta có $\sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm như trên

Thí dụ 4:

Giải phương trình: $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$ (1).

Giải

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$), khi đó (1) có dạng

$$|t| + 4(1 - t^2) = 1 \ (2).$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le t \le \sqrt{2} \\ 4t^2 - t - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\sqrt{2} \le t \le 0 \\ 4t^2 + t - 3 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow |t| = 1 \Leftrightarrow |\sin x - \cos x| = 1 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Thí dụ 5:

Cho phương trình $\sin^3 x - \cos^3 x = m$ (1). Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) = m$ (2).

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$) khi đó (2) có dạng:

$$t\left(1+\frac{1-t^2}{2}\right)=m \Leftrightarrow -t^3+3t=2m.$$

Bài toán trở thành: Tìm m để hệ:

$$\begin{cases} f(t)=-t^3+3t=2m & (3) \\ -\sqrt{2}\le t\le \sqrt{2} & (4) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $f'(t)=-3t^2+3$ và có bảng biến thiên sau:

t	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Vậy (3) và (4) có nghiệm, tức là (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$-2\le 2m\le 2 \Leftrightarrow -1\le m\le 1.$$

§4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC SỬ DỤNG NHIỀU ĐẾN PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Nhìn chung khi đứng trước một phương trình lượng giác đã cho, nếu như thấy phương trình ấy không thuộc vào các dạng cơ bản đã nêu trong các mục §1, §2, §3 ở trên, thì trước hết cần phải dùng các phép biến đổi lượng giác thông dụng (công thức cộng, công thức nhân, biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng, công thức hạ bậc...) để đưa phương trình ban đầu về các dạng cơ bản ở trên, hoặc đưa về phương trình tích mà mỗi thừa số có dạng phương trình cơ bản.

Đây là phương pháp phổ thông nhất và rất có hiệu quả để giải phương trình lượng giác.

Xét các thí dụ sau:

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)

Giải phương trình: $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$ (1).

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 4\sin x\cos^2 x+2\sin x\cos x-(1+2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x(1+2\cos x)-(1+2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sin 2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{1}{2} \\ \sin 2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)

Giải phương trình lượng giác: $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$ (1).

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow (2\sin^2 2x - 1) + (\sin 7x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 4x + 2\cos 4x\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \sin 3x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}\\ x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}.\end{array}\right. ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)

Giải phương trình: $\dfrac{2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ (1).

Giải

Để (1) có nghĩa cần có $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2).

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2\left(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \dfrac{1}{2}\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$ ($\sin 2x= -\dfrac{4}{3}$ loại vì $|\sin 2x| \geq 1$)

$\Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (3)

Kết hợp (2) và (3) suy ra $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm cần tìm.

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)

Giải phương trình: $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ (1)

Giải

Áp dụng công thức "hạ bậc", ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}\cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$$

$\Leftrightarrow \cos 6x\cos 2x = 1 \Leftrightarrow (4\cos^3 2x - 3\cos 2x)\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x = 2 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)

Giải phương trình: $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ (1).

Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (2)

Áp dụng công thức "hạ bậc", ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}.\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x} - \frac{1+\cos x}{2} = 0$$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos x)(1 + \cos x) - \cos^2x(1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \sin x = 1\\ \tan x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. (3), k \in \mathbb{Z}.$$

Từ (2) và (3) suy ra: $x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Thí dụ 6

Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ (1)

Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (1-\tan x)\left(1+\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) = 1 + \tan x \Leftrightarrow 2\tan^2x(1+\tan x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Thí dụ 7:

Giải phương trình: $2\sin 3x(1 - 4\sin^2x) = 1$ (1).

Giải

Dễ thấy $\cos x = 0$ không thỏa mãn (1), từ đó

(1) $\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x[1 - 4(1 - \cos^2x)] = \cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x(4\cos^3x - 3\cos x) = \cos x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x=\cos x \Leftrightarrow \sin 6x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}\\ x = \frac{\pi}{10} = k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

§5: NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THUỘC MỘT MIỀN CHO TRƯỚC

Bài toán đòi hỏi tìm nghiệm của phương trình lượng giác trong một miền cụ thể cho trước. Với các bài toán này, phương pháp giải được tiến hành theo các bước sau:

1/ Giải phương trình lượng giác như bình thường.

2/ Với nghiệm tìm được, để xác định số k trong công thức nghiệm ta phải giải một bất phương trình (tìm nghiệm nguyên).

3/ Thay giá trị k tìm được vào công thức nghiệm tìm được ở bước 1.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2002)

Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x \quad (1).$$

Giải

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$ (2).

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 5\dfrac{\sin x + 2\sin 2x \sin x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3 + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 5\dfrac{\sin x + \cos x - \cos 3x + \sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3 + \cos 2x \Leftrightarrow 5\cos x = 3 + 2\cos^2 x - 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ (loại $\cos x = 2$) $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

+ Ta có: $0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{5}{6} \Leftrightarrow k = 0$ (do k nguyên).

+ Lại có $0 < -\frac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{7}{6} \Leftrightarrow k = 1$ (do k nguyên).

Vậy $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{5\pi}{3}$ là hai nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của (1).

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002)

Tìm nghiệm thuộc [0;14] của phương trình $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ (1)

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có $0 \le \frac{\pi}{2} + k\pi \le 14 \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{2} + k \le \frac{14}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{14}{\pi} - \frac{1}{2} < 4$.

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1, 2, 3, 0\}$. Thay lại vào (2) và thấy trên [0;14], (1) có 4 nghiệm sau: $x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3\pi}{2}; x_3 = \frac{5\pi}{2}; x_4 = \frac{7\pi}{2}$.

Thí dụ 3: Cho phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$ (1).

Tìm tổng các nghiệm của (1) trên [1; 70].

Giải

Điều kiện để (1) có nghiệm là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - (1 + \tan^2 x)$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \ (2)$$

Ta xem trên đoạn [1;70] có bao nhiêu nghiệm dạng (2)

Ta có: $1 \le \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \le 70 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\pi} < 2k + 1 < \dfrac{210}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{\pi} - 1\right) < k < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{210}{\pi} - 1\right)$

Do k nguyên nên k = 0; 1; 2; 3….; 32.

Vậy trên [1; 70] có 33 nghiệm dạng (2). Chúng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = \dfrac{\pi}{3}$ và công sai $d = \dfrac{2\pi}{3}$

Vậy tổng S các nghiệm này là: $S = \dfrac{\left[2u_1 + (n-1)d\right]n}{2} = 363\pi$

(ở đây $u_1 = \dfrac{\pi}{3}$; $d = \dfrac{2\pi}{3}$ và n = 33).

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1: Giải phương trình lượng giác: $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$.

Đáp số: $x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}; x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 2:

Giải phương trình lượng giác: $2\sin 4x + 3\cos 2x + 16\sin^3 x\cos x - 5 = 0$.

Đáp số: $x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ và $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Bài 3:

Giải phương trình lượng giác: $\sin 3x + \left(\sqrt{3} - 2\right)\cos 3x = 1$.

Đáp số: $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{2\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 4: Giải phương trình lượng giác: $4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0$.

Đáp số: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 5:

Giải phương trình lượng giác: $\sqrt{2}\sin^3 x\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x$.

Đáp số: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 6:

Giải phương trình lượng giác sinx – cosx + 7sin2x = 1.

Đáp số: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi; x=\frac{\pi}{4}-\alpha+k2\pi; x=\frac{5\pi}{4}+\alpha+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$,

ở đây $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{7}$.

Bài 7:

Giải phương trình lượng giác sin2x + $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Đáp số: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 8:

Tìm m để phương trình: sin2x + 4(cosx – sinx) = m có nghiệm.

Đáp số: $-4\sqrt{2}-1\le m\le 4\sqrt{2}-1$.

Bài 9:

Giải phương trình lượng giác: cos2x + 5 = 2(2 – cosx)(sinx – cosx).

Đáp số: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 10:

Giải phương trình lượng giác: $\sin^3x+\cos^3x=2(\sin^5x+\cos^5x)$.

Đáp số: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 11:

Giải phương trình lượng giác: $2\cos 2x-8\cos x+7=\frac{1}{\cos x}$.

Đáp số: $x=k2\pi;\ \ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Bài 12: Tìm nghiệm thuộc khoảng (–2; 4) của phương trình:

$$\sin x\cos 4x+2\sin^2 2x=1-4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Đáp số: $x=\frac{\pi}{2}$.