

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A- HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN:

1. Hệ đối xứng loại I: Là HPT mà trong từng phương trình của hệ khi ta thay đổi vai trò của x và y cho nhau thì phương trình không thay đổi

- Có dạng:
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{trong đó} \quad \begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x) \end{cases}$$
- Cách giải: Đặt
$$\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \quad (I) \quad \text{Ta được hệ:} \quad \begin{cases} F(S, P) = 0 \\ G(S, P) = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Giải hệ (II) tìm được S và $P \rightarrow x, y$ là 2 nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$

- Chú ý: 1) Hệ (I) có nghiệm \Leftrightarrow Hệ (II) có nghiệm thoả mãn $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$
2) Một số biểu thức đối xứng

a, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$

d, $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = (S^2 - 2P)(S^3 - 3P) - S.P^2$

b, $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3PS$

e, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{S}{P}$

c, $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

f, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (1;1)$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (1;2), (2;1)$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (1;3), (3;1)$$

d)
$$\begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } \left(\frac{7 + \sqrt{45}}{2}; -1\right), \left(\frac{7 - \sqrt{45}}{2}; -1\right), \left(-1; \frac{7 + \sqrt{45}}{2}\right), \left(-1; \frac{7 - \sqrt{45}}{2}\right)$$

e)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (0; -1), (-1; 0)$$

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases} \quad (\text{Khối D-2004})$$

Đáp số: $m = \frac{1}{4}$

Bài 3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

2. Hệ đối xứng loại II: Là hệ phương trình nếu đổi vị trí 2 ẩn trong hệ thì phương trình này trở thành phương trình kia.

- Có dạng:
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ f(y, x) = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$
- Cách giải:
 - + Trừ theo vế của 2 phương trình (1) và (2) ta được phương trình dạng tích: $(x - y).h(x, y) = 0$
 - + Từ đó: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y & (II) \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x, y) = 0 & (III) \\ f(x, y) + f(y, x) = 0 \end{cases} \end{cases}$
 - + Giải hệ (II) giải bằng phương pháp thế. Hệ (III) là hệ đối xứng loại I.
- Chú ý: Nếu (x_0, y_0) là nghiệm của hệ thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ.

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (0; 0), (\sqrt{11}; \sqrt{11}), (-\sqrt{11}; -\sqrt{11})$$

b)
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases} \quad (\text{Khối B} - 2003) \quad \text{Đáp số: } (1; 1)$$

c)
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \frac{y}{x} \\ y - 3x = 3 \frac{x}{y} \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (-2; -2)$$

3. Hệ đẳng cấp: Là hệ phương trình mà mọi phương trình của hệ đều có vế trái đẳng cấp

- Có dạng:
$$\begin{cases} f(x, y) = a \\ g(x, y) = b \end{cases} \quad \text{trong đó} \quad \begin{cases} f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y) \\ g(tx, ty) = t^n \cdot g(x, y) \end{cases}$$
- Cách giải:
 1. Tìm nghiệm thoả mãn $x = 0$ (hay $y = 0$)
 2. Với $x \neq 0$ (hay $y \neq 0$), đặt $y = tx$ (hay $x = ty$)
- Chú ý: đối với hệ
$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$
 ta có thể khử y^2 (hay x^2), rồi tính y theo x (hay x theo y), sau đó thay vào một trong hai phương trình của hệ.

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2x^2y + xy^2 = 15 \\ 8x^3 + y^3 = 35 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (1;3), \left(\frac{3}{2}; 2\right)$$

$$b) \begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9x^2 + 11xy - 8y^2 = 6 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), (1; -2), (-1; 2)$$

$$b) \begin{cases} (x - y)^2 y = 2 \\ x^3 - y^3 = 19 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (3; 2), \left(\frac{7}{\sqrt[3]{18}}; \frac{1}{\sqrt[3]{18}}\right)$$

$$c) \begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases} \quad \text{Đáp số: } (1; 2), (2; 1)$$

B- HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CÓ CẤU TRÚC ĐẶC BIỆT

Trong các đề thi đại học những năm gần đây, ta gặp rất nhiều bài toán về hệ phương trình. Nhằm giúp các bạn ôn thi tốt, sau đây ta có một số dạng bài và kỹ năng giải chúng.

1. Phương pháp biến đổi tương đương:

Đặc điểm chung của dạng hệ này là sử dụng các kỹ năng biến đổi đồng nhất đặc biệt là kỹ năng phân tích nhằm đưa một PT trong hệ về dạng đơn giản (có thể rút theo y hoặc ngược lại) rồi thế vào PT còn lại trong hệ .

Loại I: Trong hệ có một phương trình bậc nhất với ẩn x hoặc y khi đó ta tìm cách rút y theo x hoặc ngược lại

Bài 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 & (1) \\ xy + x + 1 = x^2 & (2) \end{cases}$$

Gợi ý: Từ PT (1) $\rightarrow y+1 = \frac{x^2-1}{x}$ thế vào (1) được PT: $(x-1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) = 0$

Đáp số: $(1; -1), \left(-2; -\frac{5}{2}\right)$

Bài 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} \quad (\text{Khối B} - 2008)$$

Loại II: Một phương trình trong hệ có thể đưa về dạng tích của các phương trình hai ẩn

Bài 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases} \quad (\text{Khối A} - 2003)$$

Gợi ý: $(1) \Leftrightarrow (x - y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0$

Đáp số: $(1; 1), \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 9. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0 & (1) \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Gợi ý: $(1) \Leftrightarrow y^2 - x^2 + y^2 + xy = 0 \Leftrightarrow (y+x)(2y-x) = 0$

Đáp số: $(-1;1), (-3;3), \left(\frac{-13+\sqrt{157}}{2}; -13+\sqrt{157}\right), \left(\frac{-13-\sqrt{157}}{2}; -13-\sqrt{157}\right)$

Bài 10. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x+y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$$
 (Khối B – 2002)

Gợi ý: $(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y}(1-\sqrt{x-y}) = 0$

Đáp số: $(1;1), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Loại III: Đưa một phương trình trong hệ về dạng phương trình bậc hai của một ẩn, ẩn còn lại là tham số

Bài 11. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Gợi ý: $y^2 - (4x+8)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow (y-5x-4)(y+x-4) = 0$

Đáp số: $(0;4), (4;0), \left(-\frac{4}{5}; 0\right)$

Bài 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$
 (Khối D – 2008)

Gợi ý: $x^2 - (y+1)x - 2y^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0 \Leftrightarrow x-2y-1 = 0$ (do đ/k: $x \geq 1, y \geq 0$)

Đáp số: $(5;2)$

Loại IV: Biến đổi hệ phương trình về dạng có thể sử dụng được định lý Viet

Bài 13. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(2x+3y)(x-1) = 14 \\ x^2 + x + 3y = 9 \end{cases} \quad (I)$$

Gợi ý: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \cdot (2x+3y) = 14 \\ x(x-1) + (2x+3y) = 9 \end{cases}$

Đáp số: $(-1;3), (2;1), \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; \frac{1-\sqrt{29}}{3}\right), \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{3}\right)$

Bài 14. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (3x+y)^2 - 3(9x^2 - y^2) - 10(3x-y)^2 = 0 \\ 3x+y + \frac{1}{3x-y} = 6 \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Gợi ý: Đ/k } 3x - y \neq 0. \text{ Khi đó (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3x+y}{3x-y}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3x+y}{3x-y} - 10 = 0 \\ 3x+y + \frac{1}{3x-y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+y}{3x-y} = 5 \vee \frac{3x+y}{3x-y} = -1 \\ 3x+y + \frac{1}{3x-y} = 6 \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } (1;2), \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right), \left(\frac{3+\sqrt{11}}{12}; \frac{9+3\sqrt{11}}{4}\right), \left(\frac{3-\sqrt{11}}{12}; \frac{9-3\sqrt{11}}{4}\right)$$

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Điểm quan trọng nhất trong hệ dạng này là phát hiện ẩn phụ $a = f(x, y); b = g(x, y)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$ (I) (Khối B – 2009)

$$\text{Gợi ý: (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} = 13 \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } \left(1; \frac{1}{3}\right), (3;1)$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y+x+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$ (II) (Khối D – 2009)

$$\text{Gợi ý: (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \frac{3}{x} + 1 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } (1;1), \left(2; \frac{3}{2}\right)$$

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$ (II) (Khối A – 2008)

$$\text{Gợi ý: (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right), \left(1; -\frac{3}{2}\right)$$

Bài 18. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases} \quad (\text{III}) \quad (\text{Dự bị khối A - 2006})$$

Gợi ý: (III) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + y + x = 4 \\ \left(\frac{x^2 + 1}{y}\right)(y + x - 2) = 1 \end{cases}$

Đáp số: (1;2), (-2;5)

Bài 19. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x + y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x + y} = 3 \end{cases} \quad (\text{IV})$$

Gợi ý: (IV) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x + y)^2 + (x - y)^2 + \frac{3}{(x + y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x + y} + x - y = 3 \end{cases}$ Đặt $a = x + y + \frac{1}{x + y}$ ($|a| \geq 2$); $b = x - y$

Đáp số: (1;0)

Bài 20. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x + 1} + \sqrt{y + 1} = 4 \end{cases} \quad (\text{I}) \quad (\text{Khối A - 2006})$$

Gợi ý: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 & (1) \\ x + y + 2 + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 16 & (2) \end{cases}$. Đặt $t = \sqrt{xy} \geq 0 \xrightarrow{\text{theo (1)}} x + y = 3 + t$ thế vào (2)

Đáp số: (3;3)