

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi, \\ u = \pi - v + k2\pi. \end{cases}$
- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi.$
- $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi.$
- $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi.$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- 1) $\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3};$ 3) $\cos x^2 = \frac{1}{2};$
- 2) $\sin(x - 60^\circ) + 2\cos(x + 30^\circ) = 0;$ 4) $\cos(\cos x) = \cos(2\cos x);$
- 5) $2\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3};$ 6) $\cot g 3x = \cot g 5x;$
- 7) $\tan 3x = \tan x;$ 8) $2\cos(x^2 - 2x) - 1 = 0;$
- 9) $\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{4};$
- 10) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x = 1.$
- 11) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 2\sin^2 x.$
- 12) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3};$
- 13) $\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3};$
- 14) $2\sin(6\cos x \cdot \cos 2x - 3\cos 3x) = 1$
 Đáp số. $x = \pm \arccos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}\right); x = \pm \arccos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}\right).$
- 15) $2\cos(8\sin 3x \cdot \cos 2x - 4\sin 5x) + 1 = 0;$

Đáp số

$$1) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi, \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi; \end{cases}^1$$

$$2) x = 60^0 + k180^0;$$

$$3) x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3}};$$

$$4) x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$5) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi; \end{cases}$$

$$6) x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$7) x = k\pi$$

$$8) \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{3} + k2\pi} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\pi}{3} + l2\pi} \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$9) x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};$$

$$10) \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Bài 2. Tìm tất cả các nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$ của phương trình :

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Đáp số: } \left\{ -\frac{31\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{17\pi}{24} \right\}$$

Bài 3. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$$\sin(\pi x^2) = \sin[\pi(x^2 + 2x)].$$

$$\text{Đáp số: } \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$54. \sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x.$$

$$55. (\text{Dự bị 2004}) \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$56. (\text{Dự bị 2004}) \sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0.$$

57. (Dự bị 2002) Tìm m để phương trình

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2 \sin 2x + m = 0$$

có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Đáp số. } -\frac{10}{3} \leq m \leq -2.$$

$$58. (\text{Dự bị 2002}) \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} = \frac{1}{2} \cot 2x - \frac{1}{8 \sin 2x}.$$

$$\text{Đáp số. } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$59. (\text{Dự bị 2002}) \tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x) \cdot \sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$60. (\text{Dự bị 2002}) \tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right)$$

$$61. (\text{Dự bị 2002}) \text{ Cho phương trình } \frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3} = a$$

$$1) \text{ Giải phương trình khi } a = \frac{1}{3}.$$

2) Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm.

$$62. (\text{Dự bị 2002}) \text{ Giải phương trình } \sqrt{\frac{1}{8 \cos^2 x}} = \sin x.$$

¹ Trong cách viết các nghiệm của phương trình lượng giác, nếu không có thêm điều kiện gì khác thì $k, l, m, u, n \in \mathbb{Z}$.

$$42. \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(\sin x + 1).$$

$$43. \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$44. (\text{Dự bị A, 2006}) \cos 3x \cdot \cos^3 x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Đáp số. } x = \pm \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}.$$

$$45. (\text{Dự bị A, 2006}) 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin x + 1 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

$$46. (\text{B, 2006}) \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

$$47. (\text{A, 2005}) \cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{k\pi}{2}.$$

$$48. (\text{B, 2005}) 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

$$49. (\text{D, 2005}) \cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$50. (\text{Dự bị 2005}) 2\sqrt{2} \cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos x - \sin x = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

51. (Dự bị 2005) Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2 \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

$$\text{Đáp số. } S = \left\{ \frac{5\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$$52. (\text{Dự bị 2005}) \sin x \cos 2x + \cos^2 x (\tan^2 x - 1) + 2 \sin^3 x = 0.$$

$$53. (\text{Dự bị 2004}) 4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3 \sin x.$$

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1 : Giải các phương trình sau:

$$a) \cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1;$$

$$b) \sqrt{6 - \sin x - 7 \cos^2 x} + \sin x = 0;$$

$$c) 4|\sin x| + 2 \cos 2x = 3;$$

$$d) \sin x - \frac{|2 \cos x - 1|}{2 \cos x - 1} \sin^2 x = \sin^2 x;$$

$$e) \sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x;$$

$$f) \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{3}{\sin x \cos x} - 4 = 0;$$

$$g) \operatorname{tg} 5x + 2 \sin 10x = 5 \sin 5x;$$

$$h) \sqrt{2 \cos 2x + 2} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4 \cos 2x}};$$

$$i) 2 \cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) = 5;$$

$$j) \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{5}{2};$$

$$k) \sin^2 x + \cos 2x - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ với } -\pi < x < \frac{5\pi}{2};$$

$$l) \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \operatorname{tg} x} = 1, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2};$$

$$m) \cos(10x + 12) + 4\sqrt{2} \sin(5x + 6) = 4.$$

Đáp số :

$$a) \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} + k5\pi, \\ x = n5\pi; \end{cases}$$

$$b) \sin x = -\frac{1}{3};$$

$$c) \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = k\pi, \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; \end{cases}$$

$$e) x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};$$

$$f) \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{5}, \\ x = \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{1}{5} \arccos \frac{1}{4}; \end{cases}$$
 h) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$; i)
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi; \end{cases}$$

j) \emptyset ; k) $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, 2\pi \right\}$;

l)
$$\begin{cases} x = \pi, \\ x = \pi + \arctg 2; \end{cases}$$
 m) $\left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{4} - 6 + k2\pi \right) \cup \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi}{4} - 6 + k2\pi \right) \right\}$.

Bài 2. Cho phương trình $\sin nx + \cos nx = m$ (*) (m là tham số).
 Với $n = 4, n = 6, n = 8$. Tìm điều kiện của m để cho phương trình (*) có nghiệm.

Đáp số: $0 \leq m \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \leq m \leq 1, \frac{1}{8} \leq m \leq 1$.

Bài 3. (Học viện Báo chí tuyên truyền, HCM, 2001)

Cho phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = a \cdot \sin 2x$

- a) Giải phương trình khi $a = 1$;
 b) Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm.

Đáp số: a) $\sin 2x = \frac{2}{3}$; b) $|a| \geq \frac{1}{4}$.

Bài 4. (ĐH Y dược HCM, 2001) Xác định các giá trị của tham số a sao cho phương trình sau có nghiệm $\sin^6 x + \cos^6 x = a \cdot |\sin 2x|$

Đáp số: $a \geq \frac{1}{4}$.

Bài 5. (ĐH Huế, 2001) Cho phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x = m \sin 2x - \frac{1}{2}$

- (1).
 a) Giải phương trình khi $m = 1$;
 b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số thực m thỏa $|m| \geq 1$ thì phương trình (1) luôn luôn có nghiệm.

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 6. (ĐHQGHN, khối D, 2000)

Cho phương trình $6\sin^2 x - \sin^2 2x = m \cos^2 x$.

30. (Dự bị 2, A, 2007)

$$2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3} \cos x).$$

Đáp số. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

31. (Dự bị B, 2007) $\sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$.

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi$

32. (Dự bị B, 2007) $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$.

Đáp số. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

33. (Dự bị 1, D, 2007) $2\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) \cos x = 1$.

Đáp số. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

34. (Dự bị 2, D, 2007) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi$

35. (Dự bị B, 2006) $(2 \sin^2 x - 1) \tan^2 2x + 3(\cos^2 x - 1) = 0$.

Đáp số. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$.

36. (Dự bị B, 2006) $\cos 2x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$.

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi$

37. (Dự bị D, 2006) $\cos^3 x + \sin^3 x + 2 \sin^2 x = 1$.

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = 2k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

38. (Dự bị D, 2006) $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 3 \sin 2x + 6 \cos x = 0$.

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

39. $2 \cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = 2(\sin x + \cos x)$.

40. $3 - 4 \sin^2 2x = 2 \cos 2x(1 + 2 \sin x)$.

41.

$$2 \cos x + \frac{1}{3} \cos^2(x + \pi) = \frac{8}{3} + \sin 2x + 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \sin^2 x.$$

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi; \quad x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi.$

17. (A, 2008) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right).$

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$

18. (B, 2008) $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

19. (D, 2008) $2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

20. (Cao đẳng A, B, D, 2008) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{4\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}$

21. (Dự bị 1, A, 2008) $\tan x = \cot x + 4 \cos^2 2x.$

22. (Dự bị 2, A, 2008) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$

23. (Dự bị 1, B, 2008) $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

24. (Dự bị 2, B, 2008) $3 \sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}.$

25. (Dự bị D, 2008) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0.$

26. (A, 2007) $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x.$

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$

27. (B, 2007) $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$

28. (D, 2007) $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2.$

$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

29. (Dự bị 1, A, 2007) $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot 2x.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

a) Giải phương trình khi $m = 3;$

b) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Đáp số: a) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi;$ b) $m \geq 0.$

Bài 7. (ĐHQG HCM, đợt 3, 1998)

Cho phương trình $\cos 4x + 6 \sin x \cos x = m.$

a) Giải phương trình khi $m = 1;$

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x

$\in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$

Đáp số: b) $-2 \leq m < \frac{17}{8}.$

Bài 8. Cho phương trình $\sin x + \sin 2x + a \sin 3x = 0.$

a) Giải phương trình khi $a = 0;$

b) Chứng minh rằng với mọi $a > 1$ thì phương trình đã cho có đúng

hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

Bài 9. (ĐH Thái Nguyên, 2000) Cho phương trình $3 \cos^2 x + 2 |\sin x| = m.$

a) Giải phương trình khi $m = 2;$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$

Đáp số: b) $\emptyset.$

Bài 10. (Hàng không Việt Nam, 1997)

Cho phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + m = 0.$

a) Giải phương trình khi $m = -2;$

b) Giải và biện luận phương trình đã cho.

Đáp số:

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

b)

$$\begin{aligned} \vee \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} &: \text{phương trình vô nghiệm.} \\ \vee \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases} &: \text{phương trình có nghiệm } x = \frac{k\pi}{2}. \\ \vee -2 < m < 0 &: x = \pm \frac{1}{2} \arccos(2 - \sqrt{1 - 4m}). \end{aligned}$$

Bài 11) Giải các phương trình sau:

1) $4 \cos^3 x + 3\sqrt{2} \sin 2x = 8 \cos x.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$

2) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x).$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

3) $\cos x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \sqrt{3}(1 + 2 \cos x);$

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

CÔNG THỨC CỘNG

Giải các phương trình sau:

1) $\cos x \cdot \operatorname{tg} 6|x| + \sin 5x = 0;$ 2) $\sin|x| \operatorname{tg} 5x = \cos x;$

3) $\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = -1;$ 4) $\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x} = 1;$

5) $2 \operatorname{tg} 3x - 3 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x;$ 6) $\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2$

7) $\cot g x + \cot g 15^\circ + \cot g(x + 25^\circ) = \cot g x \cot g 15^\circ \cot g(x + 25^\circ);$

8) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cot g x;$

9) (ĐH Dược, Hà Nội, 2001)

$\operatorname{tg}^2 x \cdot \cot g^2 2x \cdot \cot g 3x = \operatorname{tg}^2 x - \cot g^2 2x + \cot g 3x;$

10) (Cao đẳng Giao thông Vận tải, 2001)

$\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 3x \cdot \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 3x + \operatorname{tg} 4x;$

Đáp số. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

8. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối A, 2003, dự bị 2)

$\cos 2x + \cos x(2 \operatorname{tg}^2 x - 1) = 2.$

Đáp số. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi$

9. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối B, 2003, dự bị 1)

$3 \cos 4x - 8 \cos^6 x + 2 \cos^2 x + 3 = 0.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = k\pi$

10. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối B, 2003, dự bị 2)

$\frac{(2 - \sqrt{3}) \cos x - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2 \cos x - 1} = 1.$

Đáp số. $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi.$

11. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối D, 2003, dự bị 1)

$\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x).$

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi$

12. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối D, 2003, dự bị 2)

$\cot g x = \operatorname{tg} x + \frac{2 \cos 4x}{\sin 2x}.$

Đáp số. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

13. (A, 2009) $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}.$

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}.$

14. (B, 2009) $\sin x + \cos x \cdot \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$

Đáp số. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}.$

15. (D, 2009) $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0.$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$

16. (Cao đẳng A, B, D, 2009) $(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x.$

MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC GẦN ĐÂY

1. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối A, 2002)

Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình :

$$5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3.$$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}.$

2. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối B, 2002)

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x.$$

Đáp số. $x = \frac{k\pi}{9}, x = \frac{k\pi}{2}.$

3. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối D, 2002)

Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng phương trình

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

Đáp số. $\left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\}$

4. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối A, 2003)

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Đáp số. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

5. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối B, 2003)

$$\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Đáp số. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

6. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối D, 2003)

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Đáp số. $x = \pi + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

7. (Đại học, Cao đẳng toàn quốc, Khối A, 2003, dự bị 1)

$$3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0.$$

11) (Học viện Bưu chính Viễn thông, 1999) $\tan^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \tan x - 1;$

Đáp số :

$$1) \begin{cases} x = \frac{n\pi}{11}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*; \\ x = m\pi \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{12}, \\ x = \frac{\pi(2n+1)}{12}, \\ x = \frac{\pi(1-2n)}{8}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, \\ k \neq 1+3m; \end{cases} \quad 4) \emptyset;$$

$$5) x = k\pi; \quad 6) x = \arctg(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi;$$

$$7) x = 25^\circ + k90^\circ; \quad 8) x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3};$$

$$9) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x = k\pi, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \end{cases} \quad 11) x = k\frac{\pi}{4}.$$

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

Giải các phương trình sau:

- 1) $\sin \left(\pi x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\pi x - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2};$
- 2) Trong khoảng $(0; \pi/12)$, tìm các nghiệm của phương trình :

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{18} \right) \cos \left(2x - \frac{\pi}{9} \right) = -\frac{1}{4}.$$
- 3) $\sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \frac{1}{8};$
- 4) $\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x = \sin 3x \cos 5x;$
- 5) $\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \dots + \sin nx \sin n^2 x = 1;$
- 6) $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \cdot \sin 3x = 2;$

$$7) \sin 2x \sin 4x \sin 6x = \frac{1}{4} \sin 4x;$$

$$8) \text{ (ĐH Huế, 1999) } \frac{\sin x \cdot \cot g 5x}{\cos 9x} = 1;$$

$$9) \text{ (ĐH Giao thông Vận tải HN, 1996) } \cos 3x \cdot \operatorname{tg} 5x = \sin 7x;$$

$$10) \text{ (ĐH Y khoa HN, 1997) }$$

$$\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2};$$

$$11) \sin 6x \cdot \sin 2x = -\frac{1}{16};$$

$$12) \cos 2x \cdot \sin 3x + \cos x \cdot \sin 4x - \sin x = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{k\pi}{6}$$

$$13) \sin x \cdot \sin 4x + \sin 5x \cdot \sin 2x - \sin 3x = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Đáp số:

$$1) \left\{ n - \frac{5}{12}, n + \frac{1}{4} \right\}; \quad 2) \frac{7\pi}{18}; \quad 3) \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3}, \\ x = \frac{k2\pi}{9}; \end{cases} \quad 5) x = \frac{(2k+1)\pi}{n^2+n}; \quad 6) x = \frac{\pi}{6} + k\pi;$$

$$7) \left\{ \frac{k\pi}{4} \right\} \cup \left\{ \pm \frac{1}{4} \arccos \left[\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right] + \frac{k\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \pm \frac{1}{4} \arccos \left[\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right] + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

$$12) \frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + \sin 2x}{2 \sin x \cos x - 1} = 0;$$

$$13) \frac{\cos x (2 \sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1}{\sin 2x + 1} = 1;$$

$$14) \frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2} \sin x - \sin 2x + 1}{2 \sin x \cos x + 1} = -1;$$

$$15) \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$16) \cos x + \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 1 = \sqrt{3} (1 + 2 \cos x);$$

$$17) \frac{1 - 2 \sin 3x}{2 \cos 3x - \sqrt{3}} = \tan 3x;$$

$$18) \cos x + \tan x = 1 + \sin x \cdot \tan x;$$

$$19) 1 + \cos^2 x + \cos^2 2x = \sqrt{3} \sin x;$$

$$20) 2 + \frac{1}{\sin x} = 2 \sin x + 2 \cos^2 x + \cot x;$$

$$21) 9 \cos x - \cos 2x = 2 \left(\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{9}{\cos x} \right);$$

$$22) \sin^2 x + \cos x \cdot \cos 4x = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 3x$$

Đáp số:

$$1) x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; \text{ (xem phương trình đã cho là phương trình bậc hai theo } \operatorname{tg} x \text{);}$$

$$2) \begin{cases} x = k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \end{cases} \quad 3) x = (1 + 4k)2\pi; \quad 4) x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};$$

$$5) \emptyset; \quad 6) x = \pm 1; \quad 7) \frac{1}{2};$$

$$8) x = k\pi; \quad 9) \begin{cases} x = k\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \end{cases} \quad 10) \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$11) x = \frac{23\pi}{14} + 2m\pi; \quad 12) x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi$$

Đáp số:

$$\begin{aligned}
 &1) x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \quad 2) \emptyset; \quad 3) \begin{cases} x = k\pi, \\ y = \frac{n\pi}{2}, \\ z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3}; \end{cases} \quad 4) \left(\pm 1; \frac{\pi}{2} + k\pi \right); \\
 &5) x = 2k\pi; \quad 6) x = \frac{\pi}{8} + k\pi; \quad 7) x = 0; \\
 &8) \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right); \quad 9) \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{4} \right); \quad 10) \left(-1; 1 + \frac{\pi}{4}(2n+1) \right).
 \end{aligned}$$

MỘT SỐ BÀI KHÁC

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned}
 &1) \sin^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - \sin x + \frac{11}{12} = 0; \\
 &2) 8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0; \\
 &3) \left(\cos \frac{x}{4} - 2\sin x \right) \sin x + \left(1 + \sin \frac{x}{4} - 2\cos x \right) \cos x = 0; \\
 &4) \sin 4x \cdot \cos 16x = 1; \\
 &5) \sin \left(\frac{5x}{2} \right) - \sin \left(\frac{x}{2} \right) = 2; \\
 &6) x^2 + (x+1) \sin \frac{\pi x}{6} = \frac{3+x}{2}, \quad -2 \leq x \leq 2; \\
 &7) x = \sin \pi \frac{x+1}{3} \sin \pi \frac{1-x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1; \\
 &8) \cos^{120} x - \sin^{120} x = 1; \\
 &9) \cos^{68} x + \sin^{69} x = 1; \\
 &10) 4(\sin 3x \sin x)^2 - \sin 3x = 5; \\
 &11) 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{7x}{2} \right) - \sin \left(4x - \frac{\pi}{14} \right) = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &8) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x = m\pi, \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

Bài 1. Giải các phương trình sau :

$$\begin{aligned}
 &1) \cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x; \\
 &2) \sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x; \\
 &3) \cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x; \\
 &4) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x; \\
 &5) 5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0; \\
 &6) \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x}; \\
 &7) \sin a + \sin(x-a) + \sin(2x+a) = \sin(x+a) + \sin(2x-a); \\
 &8) (\text{ĐH Hàng hải, HN, 2001, Khối A}) \\
 &\quad \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x); \\
 &9) (\text{ĐH Ngoại thương, HN, 2000, Khối A}) \\
 &\quad 1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x; \\
 &10) (\text{ĐHSP, HCM, 2000, Khối D, E}) \\
 &\quad 2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = \cos 4x(2\sin 2x + 1); \\
 &11) \cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x; \\
 &12) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x; \\
 &13) 5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0;
 \end{aligned}$$

Đáp số.

$$1) \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, \\ x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{30} + \frac{k2\pi}{5}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{5}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2}, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = \frac{\pi}{7}(2k+1)\pi, \\ k \neq 7l-4; \end{cases}$$

7) $(-\infty; +\infty)$ với $a \in \{k\pi\}$, $x = \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} + 2k\pi$ với $a \in (-\infty; +\infty)$;

$$8) \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\pi, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \\ x = k\pi; \end{cases} \quad 10) x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}.$$

CÔNG THỨC HẠ BẬC, CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

Bài 1: Giải các phương trình sau :

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$;

- a) Giải phương trình khi $m = -1$ bằng cách đặt $t = \cos x - \sin x$;
b) Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Đáp số: a) $\begin{cases} x = -\pi + k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$

Bài 5. (ĐH Tài chính Kế toán HCM, 1993)

Cho phương trình $|\sin x + \cos x| + a \sin 2x = 1$ ($a > 0$).

Tìm a để phương trình có nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH HAI VẾ

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- $\sqrt{-3 - \cos^2 x} + 3 \sin 5x = 1 - \sin x$;
- $2 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 5$;
- $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(1 + \operatorname{tg}^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4$;
- (CĐSP Kỹ thuật, 2001) Tìm x, y thỏa $x^2 - 2x \sin xy + 1 = 0$;
- (Ngân hàng, HCM, 2001) $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$;
- (Kỹ thuật Công nghệ, 2001, Khối D) $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{cotg}^2 2x = 2 \sin^5\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;
- (ĐHTCKT, Hà Nội, 1999) $\pi^{|\sin \sqrt{x}|} = \cos x$;
- $4 + \sin^2 x + \cos^2 2x = 5 \sin^2 x \sin^2 y$;
- $\operatorname{tg}^2 2x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x + 3 = -\operatorname{cotg}^2\left(4y - \frac{\pi}{6}\right)$;
- $1 - 2x - x^2 = \operatorname{tg}^2(x + y) + \operatorname{cotg}^2(x + y)$.

$$7) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x = \pi + k2\pi; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = \pi + k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x = \pi + k2\pi; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x = 2k\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x = \left(\frac{\pi}{2} + 4k\pi\right)^2 \\ x = \left(\frac{11\pi}{6} + 4k\pi\right)^2 \\ x = \left(-\frac{5\pi}{6} + 4m\pi\right)^2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 2. (ĐH Thái Nguyên, 2000)

Cho phương trình $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$.

- a) Giải phương trình khi $m = 4$;
b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Đáp số: a) $\begin{cases} x = k2\pi, \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; \end{cases}$ b) $-1 - 4\sqrt{2} \leq m \leq -1 + 4\sqrt{2}$.

Bài 3. (ĐHSP, HCM, Khối A, B, 2001)

Cho phương trình $2\cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = m(\sin x + \cos x)$

- a) Giải phương trình khi $m = 2$;
b) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Đáp số: a) $\begin{cases} x = k2\pi, \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \end{cases}$ b) $-2 \leq m \leq 2$.

Bài 4. (ĐH Quốc gia HCM, 2000)

Cho phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = m$ (1)

- 2) (Khối B, 2002) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$;
3) $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10,5\pi + 10x)$;
4) $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{9}{16}$;
5) $\sin 7x + \sin 9x = 2 \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \right]$;
6) $\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = 0$; 7) $\cos \frac{x}{4} - \sqrt{8} \cos \frac{x}{8} = 0$;
8) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x$; 9) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$;
10) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot g \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot g \left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;
11) $\sin^2 2x = 3 \cos^2 x - \sin^2(x + \pi)$ với $-\frac{5\pi}{2} < x < \pi$;
12) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$;
13) (ĐH Ngoại thương, HN, 2000)

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4} \cos 2x;$$

Bài 2) (ĐH Mở, HN, 2000)

Cho phương trình $\sin^8 x + \cos^8 x - 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = m \cos 2x$.

- a) Giải phương trình khi $m = \frac{7}{3}$;
b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Đáp số:

1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{11} + \frac{2k\pi}{11}, \\ x = \frac{2k\pi}{5}; \end{cases}$

$$2) \begin{cases} x = k\pi, \\ x = \frac{k\pi}{9}; \end{cases} \quad 4) x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4} + k\pi;$$

$$6) x = \pm 4 \arccos \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + 8k\pi; \quad 7) x = \pm 8 \arccos \frac{\sqrt{2} - 2}{2} + 16k\pi;$$

$$8) x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad 9) x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; \quad 10) x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2};$$

$$11) \left\{ -\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\};$$

$$12) x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \quad 13) x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};$$

Bài 2) a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; b) $[-1; 1] \setminus \{0\}$.

CÔNG THỨC TÍNH $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ THEO $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Bài 1 : Giải các phương trình sau :

- 1) $\operatorname{tg} 2x + 3 \cot x = 0$;
- 2) $\sin 2x + 3 \sin x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
- 3) (Bách khoa HN, khối A, D, 2001) $\sin 2x + 2 \operatorname{tg} x = 3$;
- 4) (SPHN, 2001, khối B, M, T) $\operatorname{tg} x + 2 \cot 2x = \sin 2x$;
- 5) (QGHN, khối D, 2000) $1 + 3 \operatorname{tg} x = 2 \sin 2x$;
- 6) (Hàng hải, 2000) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos x + \sin 2x = 0$;
- 7) $15 \cot \frac{x}{2} + 130 \sin x = \frac{53}{5} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
- 8) $\frac{59}{4} \cos x + 6 \sin x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4 \operatorname{tg} x \cdot \cot \frac{x}{2}$;
- 9) $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin^2 x - \operatorname{tg} x$;
- 10) (ĐH Thủy lợi 1999) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{3}{2} \cot x$.

Bài 17 : Giải các phương trình sau :

- 1) $1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2} \sin x$;
- 2) (Cao đẳng TCKT, HN, 2001) $\cos^3 x + \cos^2 x + 2 \sin x - 2 = 0$;
- 3) (ĐH Cảnh sát 2000) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$;
- 4) (ĐH Đà Lạt, 2001) $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;
- 5) (ĐH An ninh, 1999) $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$;
- 6) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)} = 4 \sin \left(x + \frac{5\pi}{4} \right)$;
- 7) (ĐH Ngoại ngữ, HN, 2000) $\sin 2x + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$;
- 8) (ĐHQG HCM, 2000) $\cos^3 x - \sin^3 x = -1$;
- 9) (ĐH Nông nghiệp, HN, 2000) $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin 2x$;
- 10) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \sin x \cos x)$;
- 11) $\sin \frac{\sqrt{x}}{2} + \cos \frac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{2} \sin \sqrt{x}$.

Đáp số :

- 1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \end{cases} \quad 3) x = \frac{k\pi}{2};$
- 4) $\begin{cases} x = k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x = k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi; \end{cases}$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG – PHƯƠNG TRÌNH PHẢN XỨNG

I. Phương trình đối xứng theo $\sin x$ và $\cos x$

1) Định nghĩa. Phương trình đối xứng theo $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0 \quad (*) \text{ trong đó } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

2) Cách giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$).

$$\Rightarrow t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \text{ (hay } \sin 2x = t^2 - 1).$$

Thay vào phương trình đã cho ta được một phương trình bậc hai theo t . Giải phương trình này và nhận nghiệm t thỏa $|t| \leq \sqrt{2}$.

Sau đó trở về ẩn x .

F Nếu phương trình có dạng $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ (1)

thì ta đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$).

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2} \text{ (hay } \sin 2x = 1 - t^2).$$

F Nếu phương trình có dạng $a(\cos x - \sin x) + b \sin x \cos x + c = 0$ (2) thì ta viết (2) $\Leftrightarrow -a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ và đưa về dạng phương trình (1).

F Chú ý :

$$\sim \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sim \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sim \cos x - \sin x = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Đáp số :

$$1) \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + m\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \end{cases}$$

$$2) x = \frac{2k\pi}{3}; \quad 3) x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$4) x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$5) x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \quad 6) x = k\pi;$$

$$7) x = \pm 2 \arctg 5 + 2k\pi;$$

$$8) \begin{cases} x = \pm 2 \arctg 3 + 2n\pi, \\ x = \pm 2 \arctg \sqrt{\frac{3}{11}} + 2n\pi; \end{cases}$$

$$9) x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$10) \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi. \end{cases}$$

PHƯƠNG TRÌNH CỔ ĐIỂN

Bài 1: Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$;

b) $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$;

c) $\cos 7x \cdot \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \cdot \sin 5x$;

d) (ĐH Kinh tế quốc dân Hà Nội, 1997)

Tìm các nghiệm $x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7}\right)$ của phương trình

$$\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2};$$

e) $3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5 \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

f) (Cao đẳng Hải quan HCM, 1998)

$$4 \sin^3 x - 1 = 3 \sin x - \sqrt{3} \cos 3x;$$

g) (Học viện Bưu chính Viễn thông, 2001)

$$4 \sin^3 x \cdot \cos 3x + 4 \cos^3 x \cdot \sin 3x + 3 \sqrt{3} \cos 4x = 3;$$

h) $2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin x = 4 \cos^2 3x;$

i) (ĐHSP, HCM, B, D, 2001)

$$4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2;$$

j) (ĐH Nông nghiệp I, Hà Nội, 1995)

$$\sqrt{2 + \cos 2x} + \sqrt{3} \sin 2x = \sin x + \sqrt{3} \cos x;$$

k) (ĐH Thương mại, Hà Nội, 2000)

$$\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2 \cos 2x};$$

l) (ĐHSP Quy Nhơn, 1998)

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{\sin x + \sqrt{3} \cos x} = 2;$$

m) $2 - \sin x \cos 2x - \sin 2x \cos x = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) \right]^2.$

n) $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 5x;$

p) $2 \cos 3x + \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0;$

q) $\sin 9x + \sqrt{3} \cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3} \cos 9x$

Đáp số

a) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9}, \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{2k\pi}{9}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \\ x = k\pi; \end{cases}$

d) $\left\{ \frac{35\pi}{84}, \frac{53\pi}{84}, \frac{59\pi}{84} \right\};$

e) $\begin{cases} x = \frac{9\pi}{24} + \frac{\alpha}{4} + \frac{k\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{36} - \frac{\alpha}{6} + \frac{k\pi}{3}; \end{cases}$ với $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5};$

f) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}; \end{cases}$

5) (ĐH Luật, Hà Nội, 1999) $4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1);$

6) (Thuỷ Lợi HN, 2001) $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right);$

7) (ĐH Y dược, HCM, 1997) Bằng cách đặt $t = \tan x$, giải phương trình $\sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x;$

8) (ĐHQG HCM, đợt 3, 1997)

Cho phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x + a \sin^2 x.$

a) Bằng cách biến đổi $t = \cos 2x$, giải phương trình khi $a = 1;$

b) Định a để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{12}\right).$

9) (ĐHQG HN, 1998) $8 \cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x;$

Đáp số:

1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \\ x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2}, \\ x = -\frac{\pi}{12} + m\pi, \\ x = \frac{7\pi}{12} + l\pi; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ x = -\frac{5\pi}{2} + 2k\pi, \\ x = -\frac{11\pi}{2} + 2k\pi; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \\ x = \pm \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{5} - 2k\pi, \\ x = \frac{14\pi}{5} + 2k\pi, \\ x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \arctg 2 + k\pi, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; \end{cases}$

8) a) $x = \frac{k\pi}{2};$ b) $0 < a < 1.$

$$4) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \arctg 5 + k\pi; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \arctg(-2) + k\pi; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; \end{cases} \quad 9) x = \frac{k\pi}{2};$$

$$10) x = \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad 11) x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Bài 2. (ĐH Thủy sản, 2000)

Cho phương trình $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2\sin^2 x - m = 0$ (1).

- Giải phương trình khi $m = 1$;
- Giải và biện luận phương trình theo tham số m .

Bài 3) Cho phương trình

$$(4 - 6m)\sin^3 x + 3(2m - 1)\sin x + 2(m - 2)\sin^2 x \cos x - (4m - 3)\cos x = 0.$$

- Giải phương trình khi $m = 2$;
- Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\text{Đáp số : b) } \begin{cases} m \geq 1 \\ m < \frac{3}{4} \end{cases}$$

CÔNG THỨC NHÂN BA

Bài 1. Giải các phương trình sau :

- $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$;
- $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$;
- (Ngoại ngữ Hà Nội, 2001) $\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = \cos^3 4x + \frac{1}{4}$;

$$i) \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \end{cases} \quad j) x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

$$k) x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad l) \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \end{cases} \quad m) \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}. \end{cases}$$

$$*) (A, 2009) \frac{(1 - 2\sin x) \cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}.$$

$$*) (B, 2009) \sin x + \cos x \cdot \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \quad x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}.$$

$$*) (D, 2009) \sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$$

$$*) (B, 2008) \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$*) (D, 2007) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

*) (Dự bị 2, A, 2007)

$$2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3} \cos x).$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$*) (Dự bị 2002) \text{ Cho phương trình } \frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3} = a$$

- Giải phương trình khi $a = \frac{1}{3}$.
- Tìm a để phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 2. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

- a) $(m - 1)\sin x + m\cos x = 2$;
 b) $\sqrt{m} \cdot \cos x - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2 - m}$;
 c) $4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$.

Đáp số

- a) $\begin{cases} m \leq \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \\ m \geq \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$ b) $[\sqrt{5} - 1; 2]$; c) $[-2; 2]$.

Bài 3 : Cho phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$

- a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
 (ĐS : $-1 \leq m \leq 3$)
- b) Giải và biện luận phương trình đã cho.

Bài 4) (ĐH Kiến trúc HN, 2001)

Giải và biện luận phương trình

$$2m(\cos x + \sin x) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2}.$$

Đáp số :

- v $m = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$;
 v $m = -\frac{1}{2}$: $x = \pi + k2\pi$;
 v $m \neq \pm \frac{1}{2}$: phương trình vô nghiệm.

Bài 5:

- a) Chứng minh rằng $-2 \leq \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \leq 1$;

- b) Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$. Tìm m để GTNN của hàm số nhỏ hơn -1 ;
 (Đáp số : $|m| > 2\sqrt{2}$).

- c) (ĐH QGHCM, 1997) Cho hàm số $y_m = \frac{2m \cos x + m + 1}{\cos x + \sin x + 2}$.

- v Với $m = 1$, hãy tìm GTLN và GTNN của hàm số.
 v Tìm m để Max_m đạt GTLN.

ĐS. * GTLN = 2, GTNN = 0; * $m = \frac{1}{3}$

PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Bài 1 : Giải các phương trình sau :

- 1) $\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$;
- 2) $3\sin^2 x - \sin 2x + 5\cos^2 x = 3$;
- 3) $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$;
- 4) $\sin^2 x(1 + \tan x) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$;
- 5) $\frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$;
- 6) $2\cos^3 x = \sin 3x$;
- 7) $2\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$;
- 8) (ĐHQGHCM, đợt 1, 1998) $3\cos^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$.
- 9) $\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 1$;
- 10) (ĐH Y khoa HN, 1999) $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$;
- 11) (ĐH Đà Nẵng, 1999) $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$;
- 12) $\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 1$.
- 13) $\sin^2 x(1 + \tan x) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$.

Đáp số :

- 1) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \arctg(-2) + k\pi; \end{cases}$ 2) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 3) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; \end{cases}$