PHẦN I: LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG I: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC (PTLG)

BÀI 1: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN (PTCB):

Trong lượng giác có 3 phương trình cơ bản.Dù cơ bản (chính vì cơ bản nên nó mới có tên như vậy) nhưng cũng phải nêu ra đây bởi vì các PTLG khác nếu giải được cũng phải đưa về một trong 3 PTCB sau đây:

1. $\sin\alpha =$ với $|\alpha| \le 1$, có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\alpha + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. $\cos\alpha =$ với $|\alpha| \le 1$, có nghiệm là:

$$x = \pm \arccos\alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3. $tgx = \alpha$ có nghiệm là:

$$x = \operatorname{arc}tg\alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(hay là $\cot gx =$ có nghiệm là:

$$x = \operatorname{arc}\cot g\alpha + k\pi\ ) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Trong các PTCB trên ta đã có sử dụng đến các hàm số lượng giác ngược:

1. Hàm $y = \arcsin x$:

Miền xác định: $D = [-1,1]$

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \sin y = x \end{cases}$$

2. Hàm $y = \arccos x$:

Miền xác định: $D = [-1,1]$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0;\pi] \\ \cos y = x \end{cases}$$

3. Hàm $y = \operatorname{arc}tgx$:

Miền xác định: $D = \mathrm{R}$

$$y = \operatorname{arc}tgx \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \\ tgy = x \end{cases}$$

4. Hàm $y = \operatorname{arc}\cot gx$:

Miền xác định: $D = R$

$$y = \operatorname{arc}\cot \mathrm{gx} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0;\pi) \\ \cot gy = x \end{cases}$$

Ta xét một số bài toán sau:

Bài toán 1: Giải phương trình sau:

$$\cos(3\pi\sin x)=\cos(\pi\sin x)$$

Giải

$$\cos(3\pi\sin x)=\cos(\pi\sin x)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\pi\sin x=\pi\sin x+k2\pi\\3\pi\sin x=-\pi\sin x+k2\pi\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\pi\sin x=k2\pi\\4\pi\sin x=k2\pi\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=k\\\sin x=\dfrac{k}{2}\end{array}\right.$$

Do $\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\|\sin x|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|k|\le 1\\\left|\dfrac{k}{2}\right|\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\dfrac{k}{2}\right|\le 1\Leftrightarrow k\in\{0;\pm1;\pm2\}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\\sin x=\pm\dfrac{1}{2}\\\sin x=\pm1\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\\sin x=\dfrac{1}{2}\\\sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{l\pi}{2}\\x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{l\pi}{2}\\x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\quad(l,k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{l\pi}{2}\\x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\quad(l,k\in\mathbb{Z})$$

<u>Nhận xét</u>: Đây là một PTLG mà việc giải nó rất đơn giản, mấu chốt của bài này là vị trí quan trọng của 'k'. Đôi lúc vai trò của 'k' trong việc giải PTLG rất quan trọng.Việc xét điều kiện 'k' có thể đưa đến một số PTLG khá hay liên quan đến việc giải một số bài toán đại số, số học nhỏ mà ta sẽ gặp ở một số bài toán sau:

Bài toán 2:

(ĐH Tổng hợp Lômônôxôp khoa Tính Toán và Điều Khiển 1979-ĐHSPII 2000)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right]=1$$

Giải

Giả sử x là số nguyên thoả mãn phương trình, khi đó ta có:

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=k2\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-16k\ge 0\\ 9x^2+160x+800=\left(3x-16k\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-16k\ge 0\\ x=\dfrac{8k^2-25}{3k+5}\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases}3x-16k\ge 0\\ 9x=24k-40-\dfrac{25}{3k+5}\end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3k+5}\in \mathbb{Z}\text{, suy ra : } k\in\{0;-2;-10\} \quad (2)$$

Từ (2) , bằng cách thử trực tiếp vào (1) ta được:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=-2\\ x=-7\end{cases}\\ \begin{cases}k=-10\\ x=-31\end{cases}\end{array}\right.$$

<u>Nhận xét</u>: Đây là một PTLG cơ bản, việc giải nó thật ra là giải một phương trình nghiệm nguyên hai ẩn mà ta sẽ đề cập đến một cách cụ thể ở phần sau.Bài toán này chỉ nhằm mục đích minh hoạ cho vai trò của ‘k’.

Bài toán 3 : Tìm số a>0 nhỏ nhất thoã mãn:

$$\cos\left[\pi\left(a^2+2a-\frac{1}{2}\right)\right]-\sin\left(\pi a^2\right)=0$$

<u>Giải</u>

$$\cos\left[\pi\left(a^2+2a-\frac{1}{2}\right)\right]-\sin\left(\pi a^2\right)=0 \quad \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{2}-\pi\left(a^2+2a\right)\right]=\sin\left(\pi a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\pi\left(a^2+2a\right)\right]=\sin\left(\pi a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\pi\left(a^2+2a\right)=\pi a^2+k2\pi\\ \pi\left(a^2+2a\right)=\pi-\pi a^2+k2\pi\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=k\in\mathbb{Z}\\ 2a^2+2a-\left(2k+1\right)=0\end{array}\right. \quad (*)$$

$$\text{Do } \begin{cases}(*)\\ a>0\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{suy ra } Min a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

<u>Nhận xét</u>: Bài toán này 2 mấu chốt quan trọng:

-Thứ nhất: ta đã sử dụng công thức cơ bản nhưng lợi hại nhất là đối với các bài toán có dạng $\sin a+\cos b$:

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

-Thứ hai: tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của biến a.

Bài toán 4: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$$\sin\left(\pi x^2\right) = \sin\left[\pi\left(x+1\right)^2\right]$$

Giải.

$$\sin\left(\pi x^2\right) = \sin\left[\pi\left(x+1\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x^2 = \pi\left(x+1\right)^2 + k2\pi \\ \pi x^2 = \pi - \pi\left(x+1\right)^2 + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2k+1}{2} \\ x^2 + x - k = 0 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$(+)$ Xét $x = -\dfrac{2k+1}{2} > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ suy ra: , ta được $x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

$(+)$ Xét phương trình $x^2 + x - k = 0$ $(*)$ có:

$$\Delta = 1 + 4k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\dfrac{1}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \geq 0$$

Thử trực tiếp ta thấy khi $k = 1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm nhỏ nhất là:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 5: Tính tổng các nghiệm $x \in [0,100]$ của phương trình sau:

$$\frac{\cos^3 x - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \cos 2x + tg^2 x$$

Giải.

Điều kiện: $\cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Với điều kiện trên phương trình:

$$\Leftrightarrow \cos x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos 2x + tg^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos 2x \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3} \quad (*)$$

Do $0 \le x \le 100$ nên $0 \le k \le \left[\dfrac{100}{\frac{2\pi}{3}}\right] = \left[\dfrac{50}{\frac{\pi}{3}}\right] = 47$

$$\Rightarrow S = \frac{48.\left(0 + \frac{47.2\pi}{3}\right)}{2} = 752\pi$$

<u>Nhận xét</u>: Bài toán này ngoài việc cho ta thấy vai trò của 'k' còn chỉ rõ một vấn đề: tầm quan trọng của việc kết hợp nghiệm. Thử hình dung, nếu ta không kết hợp nghiệm lại dưới dạng công thức (*) đon giản hơn thì ta phải tiến hành xét 2 bất phương trình sau:

$$0 \le k2\pi \le 100; \qquad 0 \le \frac{k2\pi}{3} \le 100$$

Như vậy ta phải tốn thời gian hơn, quá trình giải bài toán sẽ bị kéo dài một cách không cần thiết.

II. KẾT HỢP CÔNG THỨC NGHIỆM:

Kết hợp công thức nghiệm trong các PTLG chẳng những giúp cho ta có thể loại được nghiệm ngoại lai mà còn có thể có được một công thức nghiệm đơn giản hơn, từ đó việc giải quyết bài toán trở nên đơn giản hơn (giống như bài toán mà ta vừa xét ở trên). Đôi lúc việc kết hợp công thức nghiệm cũng tương tự như việc giải một hệ phương trình lượng giác cơ bản bằng phương pháp thế. Ở đây ta không đề cặp đến phương pháp này mà ta chỉ nói đến hai phương pháp chủ yếu sau:

A. ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC:

1.Các khái niệm cơ bản:

a) Đường tròn lượng giác: là đường tròn có bán kính đơn vị $R = 1$ và trên đó ta đã chọn một chiều dương $(+)$ (thông thường chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ)

b) Cung lượng giác: $\overset{\frown}{AB}$ (với A, B là 2 điểm trên đường tròn lượng giác) là cung vạch bởi điểm M di chuyển trên đường tròn lượng giác theo một chiều nhất định từ A đến B.

c) Góc lượng giác: khác với góc bình thường góc lượng giác có một chiều nhất định

2. Phương pháp biểu diễn góc và cung lượng giác:

a) Biểu diễn các điểm ngọn của cung lượng giác biết số đo có dạng $\alpha + k\pi$:

Ta đưa số đo về dạng $\alpha + k\dfrac{2\pi}{m}$.

Bài toán có m ngọn cung phân biệt tương ứng với k từ 0 đến (m-1).

Bài toán 1: Trên đường tròn lượng giác, ta lấy điểm A làm gốc.

Định những điểm M biết sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

<u>Giải.</u>

Ta có sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{4}$ .Suy ra có 4 điểm ngọn cung phân biệt ứng với:

$(+)\ k=0:\ \overset{\frown}{AM}=\dfrac{\pi}{4}$ $\qquad$ $(+)\ k=1:\ \overset{\frown}{AM}=\dfrac{3\pi}{4}$

$(+)\ k=2:\ \overset{\frown}{AM}=\dfrac{5\pi}{4}$

$(+)\ k=3:\ \overset{\frown}{AM}=\dfrac{7\pi}{4}$

Để ý ta thấy rằng trên đường tròng lượng giác các điểm ngọn cung là đỉnh của hình vuông $M_0M_1M_2M_3$.

<u>Nhận xét</u>: Trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn cung là đỉnh của một đa giác đều m cạnh.

b) Biểu diễn góc (cung) dưới dạng công thức tổng quát:

Ta biểu diễn từng góc (cung) trên đường tròn lượng giác. Từ đó suy ra công thức tổng quát.

Bài toán 2: Biểu diễn góc lượng giác có số đo sau dưới dạng một công thức tổng quát:

$$\begin{cases} x=k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{cases}$$

<u>Giải.</u>

Ta biểu diễn các điểm ngọn cung của $x=k\pi=k\dfrac{2\pi}{2}$

$k=0:x=0$

$k=1:x=\pi$

Ta biểu diễn các điểm ngọn cung của $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

$k=0:x=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$k=1:x=\pm\dfrac{4\pi}{3}$

Trên đường tròn lượng giác, ta nhận thấy có 6 điểm ngọn cung phân biệt, Do đó công thức tổng quát là: $x=\dfrac{k2\pi}{6}=\dfrac{k\pi}{3}$

<u>Nhận xét</u>: Qua bài toán này ta thấy rõ vai trò của việc kết hợp các góc lượng giác dưới dạng một công thức tổng quát đơn giản hơn. Hơn nữa, đây còn là bài toán về việc giải hệ phương trình lượng giác cơ bản bằng phương pháp biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Bài toán giải PTLG dùng phương pháp kết hợp nghiệm bằng đường tròn lượng giác để loại các nghiệm ngoại lai.

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\frac{\sin x(\sin x+\cos x)-1}{\cos^2 x+\sin x-1}=0$$

Giải.

Điều kiện: $\cos^2 x+\sin x-1\neq 0 \Leftrightarrow \sin x+\sin^2 x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\ (1)$$

Với điều kiện đó phương trình tương đương:

$$\sin x\left(\cos x+\sin x\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x\cos x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,k\in \mathbb{Z}\ (2)$$

Kết luận: nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ; \qquad x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ,(k\in \mathbb{Z})$$

<u>**Nhận xét**</u>: Đây là một bài có công thức nghiệm đơn giản cho phép ta có thể biểu diễn một cách chính xác trên đường tròn lượng giác. Tuy nhiên ta hãy xét thêm bài toán sau để thấy rõ màu sắc của bài toán biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Bài toán 2: Giải phương trình sau:

$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x}=1$$

Giải.

Điều kiện để phương trình có nghĩa là:

$$\cos 6x\neq 0 \Leftrightarrow 6x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6},k\in \mathbb{Z}\ (1)$$

Với điều kiện (1) phương trình tương đương:

$$\sin 4x=\cos 6x$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x=\dfrac{\pi}{2}-4x+2m\pi\\ 6x=4x-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi\end{array}\right. m\in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{m\pi}{5} \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+m\pi \end{array}\right. \quad m\in \mathbb{Z}$$

So sánh các nghiệm này với điều kiện ban đầu ta được nghiệm của phương trình là:

$x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{m\pi}{5}$ và $m\neq 5n+1$, $n\in \mathbb{Z}$

<u>Nhận xét</u>: ta nhận thấy đối với bài toán này việc biểu diễn bằng đường tròn lượng giác đã ttrở nên khó khăn và khó chính xác. Do đó ta hãy xem phương pháp hai.

B. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN:

1. Cơ sở của phương pháp:

Giải phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$, với a,b,c nguyên.

a) <u>Định lí 1</u>: Định lí về sự tồn tại nghiệm nguyên

Cần và đủ để phương trình $ax+by=c$,với $(a,b,c\in \mathbb{Z})$ có nghiệm nguyên là $(a,b)|c$.

<u>Hệ quả</u>: Nếu $(a,b)=1$ thì phương trình $ax+by=c$ luôn có nghiệm nguyên.

b) <u>Định lí 2</u>: nếu phương trình $ax+by=c$, với $(a,b,c\in \mathbb{Z})$, $a^2+b^2\neq 0$, $(a,b)=1$ có một nghiệm riêng (x_0,y_0) thì nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{cases} x=x_0+bt \\ y=y_0-at \end{cases}, \text{ với } t\in \mathbb{Z}$$

Ví dụ: phương trình $3x+2y=1$ có nghiệm riêng là $(1,-1)$ và nghiệm tổng quát là:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-3t \end{cases}, \text{ với } t\in \mathbb{Z}$$

c) <u>Ví dụ</u>: giải và biện luận phương trình nghiệm nguyên sau theo tham số m nguyên

$$6x-11y=m+2 \quad (1)$$

Ta có $(6,11)=1$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm nguyên.

Phương trình (1) có nghiệm riêng là $(2m+4,m+2)$ nên có nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x=2m+4-11t \\ y=m+2-6t \end{cases}, \ t\in \mathbb{Z}$$

2. Ví dụ: Ta xét một số bài toán dùng phương trình nghiệm nguyên để kết hợp nghiệm hay giải hệ phương trình hệ quả của PTLG.

Bài toán 1: Giải phương trình : $tg2xtg7x=1$

<u>Giải.</u>

Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 7x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (1) \\ x \neq \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k\pi}{7} (2) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương:

$$\sin 2x \sin 7x = \cos 2x \cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \cos 9x = 0 \qquad \Leftrightarrow 9x = \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9}, (3)\ m \in \mathbb{Z}$$

Ta xét xem nghiệm của (3) có thoả điều kiện (1), (2) hay không:

- Xét điều kiện (1):

Ta giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9} \qquad \Leftrightarrow 4m - 18k = 7$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình trên có $(4,18) = 2$ không phải là ước của 7 nên phương trình nghiệm nguyên vô nghiệm.

Vậy nghiệm (3) luôn thoả mãn (1)

- Xét điều kiện (2):

Ta giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$\frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9}$$

$$\Leftrightarrow 7 + 14m = 9 + 18k$$

$\Leftrightarrow 7m - 9k = 1$ có nghiệm riêng tổng quát là:

$$\begin{cases} m = 4 + 9t \\ k = 3 + 7t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Do vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9}, \text{ với } m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \neq 9t + 4, n \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét: Đối với bài toán này ta nhận thấy công thức nghiệm của nó khá phức tạp, việc biểu diễn trên đường tròn khó được chính xác. Cho nên ta dùng phương trình nghiệm nguyên sẽ chính xác và dễ dàng hơn. Quay trở lại bài toán2 ở mục trên ta thấy nếu dùng phương trình vô định thì bài toán sẽ nhanh hơn.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình cơ bản sau:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Giải.

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k\pi (1) \\ x = 2l\pi (2) \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Để giải hệ phương trình này ta giải phương trình nghiệm nguyên:

$$4k\pi = 2l\pi \quad \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + t \\ l = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = 4t\pi$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét: Có thể ta cho rằng bài toán này cực kì đơn giản nhưng nó rất quan trọng. Có một sai lầm thường gặp vô cùng nguy hiểm: khi nhìn vào hệ phương trình đơn giản này ta nghĩ ngay đến đường tròn lượng giác -"cực kì cực kì nguy hiểm". Bởi vì đường tròn lượng giác có chu ki là 2π trong khi đó (1) có chu kì là 4π và (2) có chu kì là 2π. Ta không thể sử dụng đường tròn lượng giác trong trường hợp này.

Chú ý :Ta chỉ dùng đường tròn lượng giác khi số đo góc lượng giác đó có dạng:

$$x = \alpha + \frac{k2\pi}{m} \text{ hay } x = \alpha + \frac{k\pi}{m}$$

(do đường tròn lượng giác có chu kì 2π).