MỘT SỐ GỢI Ý
KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Mỗi đề thi tuyển sinh vào Đại học thường có một câu về phương trình lượng giác (PTLG). Phương pháp thường gặp khi giải PTLG là thực hiện một số phép biến đổi lượng giác hợp lí để đưa bài toán về PT tích, đặt ẩn số phụ để quy về PT bậc hai, bậc ba, từ đó đưa về PT lượng giác cơ bản... Ta nói biến đổi hợp lí vì các đồng nhất thức lượng giác thường rất đa dạng.

Ví dụ, nếu cần biến đổi $\cos^4 x-\sin^4 x$, thì tùy theo đầu bài cụ thể, chúng ta sử dụng một trong các đồng nhất sau :

$$\cos^4 x-\sin^4 x = \cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Trong bài viết, xin được bỏ qua các phép biến đổi đơn giản hoặc viết nghiệm của các PT cơ bản.

1/ Biến đổi trực tiếp về phương trình cơ bản

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{8} \quad (1)$$

Lời giải. Biến đổi vế trái của (12) ta có

$$\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x) + \sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)$$
$$= 3\cos^3 x.\sin x-3\sin^3 x.\cos x$$
$$= 3\sin x.\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$=\frac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

PT (1) trở thành $\sin 4x=\frac{1}{2}$.

Lưu ý. Các đồng nhất lượng giác thường gặp khi giải toán :

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{4}\sin 4x \ ;$$
$$\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\sin 3x=\cos^3 2x \ ;$$
$$\cos^4 x+\sin^4 x= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=\frac{3+\cos 4x}{4} \ ;$$
$$\cos^6 x+\sin^6 x = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}=\frac{5+3\cos 4x}{8}.$$

2/ Đặt ẩn số phụ để đưa về phương trình bậc hai, bậc ba, ...

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x. \qquad (2)$$

Lời giải

(2) $\Leftrightarrow$ $1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=3\sin x\cos x$.

Đặt $t=\sin x+\cos x$ thì $t=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \Rightarrow$ $|t|\le\sqrt{2}$, lúc đó $\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$. PT đã cho trở thành

$$t^3+3t^2-3t-5=0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2+2t-5)=0.$$

Chú ý đến ĐK : $|t|\le\sqrt{2}$ ta nhận được $t=-1$.

Với $t=-1$ ta được $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lưu ý. Nếu đặt $t=\sin x+\cos x$ thì $\sin 2x = t^2-1$; $\sin.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$;

Nếu đặt $t=\sin x-\cos x$ thì $\sin 2x=1-t^2$; $\sin.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Trong cả hai phép đặt trên, đều có ĐK $t\le\sqrt{2}$.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sin x.\sin 2x+\sin 3x=6\cos^3 x \quad (3)$$

Lời giải

(3) $\Leftrightarrow$ $2\sin^2 x.\cos x+3\sin x-4\sin^3 x=6\cos^3 x$.

Nhận thấy nếu $\cos x=0$, (3) không thỏa mãn. Chia cả hai vế của (3) cho $\cos^3 x$, ta được

$$2\text{tg}^2 x+3\text{tg}x.(1+\text{tg}^2 x)-4\text{tg}^3 x=6.$$

Đặt $t = \text{tg}x$ thì

$t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2-3) = 0$.

Từ đó, dễ dàng tìm được

$\text{tg}x = 2$; $\text{tg}x = -\sqrt{3}$; $\text{tg}x = \sqrt{3}$.

Lưu ý. Nếu trong PT chỉ có các số hạng bậc nhất và bậc ba đối với sinx và cosx, thì ta có thể chia hai vế của PT cho $\cos^3 x$ hoặc $\sin^3 x$ để đưa PT đã cho về PT bậc ba của tgx hoặc cotgx.

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\text{tg}x + 2\sin 2x = 3 \quad (4)$$

Lời giải. ĐK $\cos x \neq 0$.

Đặt tgx = t, ta được PT

$$t + \frac{4t}{1+t^2} = 3 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 2t + 3) = 0.$$

Vì $t^2 - 2t + 3 > 0$ nên ta được nghiệm: $t = 1 \Rightarrow \text{tg}x = 1$.

Lưu ý. Nếu PT có các số hạng : tgx, cotgx và cos2x, sin2x, ... thì ta đặt tgx = t khi đó :

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos 2x = \frac{1-t}{1+t^2};\ \text{tg}2x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Sau đó biến đổi về một PT bậc cao đối với t.

3/ Biến đổi về phương trình tích

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x} \quad (5)$$

Lời giải. ĐK $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$.

$$2(\cos 3x - \sin 3x) + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[4(\cos^3 x + \sin^3 x) - 3(\cos x + \sin x)\right] +$$

$$+ \frac{\cos x + \sin x}{\sin x.\cos x} = 0.$$

Nhận thấy các số hạng có thừa số chung

cosx + sinx.

Dễ dàng biến đổi PT (5) thành

$$(\cos x + \sin x)\left[2(1 - 4\cos x \sin x) + \frac{1}{\sin x.\cos x}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(2\sin^2 2x - \sin 2x - 1) = 0.$$

Ta được:

$\cos x + \sin x = 0$; $\sin 2x = 1$; $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$.

Lưu ý. Các số hạng có chứa thừa số (cosx+sin) là: $\cos 2x$; $\cos^3 x + \sin^3 x$; $\cos^4 x - \sin^4 x$; $\cos 3x - \sin 3x$; $1 + \text{tg}x$; $\text{tg}x - \text{cotg}x$;...

Cũng tương tự, các bạn tự viết các số hạng có chứa thừa số (cosx – sinx).

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} \quad (6)$$

Lời giải

(6) $\Leftrightarrow \cos x.(\cos x + \cos 2x) + \sin x(\cos 2x - \cos x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x + \sin x.\cos 2x - \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x.(\cos x + \sin x) - \sin x(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0$.

Ta được :

$\cos x + \sin x = 0$; $\cos 2x - \sin x = 0$.

Lưu ý. Nếu trong PT có chứa các số hạng là tích của nhiều thừa số đối với sin hoặc cosin thì nói chung, ta phải sử dụng công thức biến tích thành tổng sau đó tìm cách đưa về PT tích hoặc đặt ẩn số phụ để được PT bậc 2, 3...

4/ Cách đánh giá hai vế

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x \quad (7)$$

Lời giải. Ta có $4\sin^2 3x.\sin^2 x = 5 + \sin 3x$.

Vì $0 \le \sin^2 3x \le 1$; $0 \le \sin^2 x \le 1$; $\sin 3x \ge -1$;

nên $4\sin^2 3x.\sin^2 x \le 4 \le 5 + \sin 3x$

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 3x.\sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin^2 x = 1. \end{cases}$$

Từ phương trình $\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$.

- $\sin x = 1 \Rightarrow \sin 3x = -1$ (thỏa mãn).
- $\sin x = -1 \Rightarrow \sin 3x = 1$ (loại).

Lưu ý. Các BĐT thường dùng để ước lượng:

$|\sin x| \le 1$; $|\cos x| \le 1$; $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

Nếu *m*, *n* là các số tự nhiên lớn hơn 2 thì

$\sin^m x \pm \cos^n x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Bài tập. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 3x = 4\cos 4x + 3$;

2. $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x =$

$= \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x$;

3. $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$;

4. $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right).\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)} = \cos^4 4x$.