CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Vòng tròn lượng giác
2. Mối liên hệ giữa các góc có liên quan đặc biệt
3 Các công thức lượng giác
    - Các hằng đẳng thức lượng giác
    - Công thức cộng
    - Công thức nhân đôi, nhân ba
    - Công thức hạ bậc
    - Công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng
    - Công thức biến đổi theo $t=\tan\frac{x}{2}$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC:

1. Phương trình lượng giác cơ bản:

Ví dụ 1: *(Đề thi đại học khối D năm 2002)*

Tìm $x\in[0;14]$ *nghiệm đúng phương trình* $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ *(1)*

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow(4\cos^3 x-3\cos x)-4(2\cos^2 x-1)+3\cos x-4=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x-2)=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in[0;14]$ nên $0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14\Leftrightarrow -0,5=-\frac{1}{2}\le k\le\frac{14}{\pi}-\frac{1}{2}\approx 3,9$,mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;3\}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right\}$

Ví dụ 2: *(Đề thi tuyển sinh đại học khối D, năm 2004)*

Giải phương trình $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\mathrm{sinx}$ *(2)*

Giải.

$$(2)\Leftrightarrow(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\mathrm{sinx}(2\cos x-1)\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\mathrm{sinx}+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \mathrm{sinx}=-\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=cos\frac{\pi}{3}\\ \mathrm{tanx}=-1=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+l\pi\end{array}\right.\ (k,l\in\mathbb{Z})$$

Ví dụ 3: *Giải phương trình* $\sin^2 x+\sin^2 3x=\cos^2 2x+\cos^2 4x$ *(3)*

Giải.

$$(3)\Leftrightarrow\frac{1-cos2x}{2}+\frac{1-cos6x}{2}=\frac{1+cos4x}{2}+\frac{1+cos8x}{2}\Leftrightarrow-(cos2x+cos6x)=cos4x+cos8x$$

$$\Leftrightarrow -2\cos 4x\cos 2x=2\cos 6x\cos 2x\Leftrightarrow 2cos2x(cos6x+cos4x)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x.\cos 5x.\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}cos2x=0\\ cos5x=0\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\ (\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$$

Chú ý:

- Khi giải phương trình lượng giác có chứa tanu, cotu, có ẩn ở mẫu, có chứa căn bậc chẵn... thì phải đặt điều kiện để phương trình xác định.

- Ta có thể dùng các cách sau để kiểm tra điều kiện xem có nhận hay không
  + Thử nghiệm tìm được xem có thỏa mãn điều kiện hay không.
  + Dùng đường tròn lượng giác
  + So điều kiện trong quá trình giải

Ví dụ 4: *Giải phương trình* $\tan^2 x - \tan x.\tan 3x = 2$ *(4)*

Giải.

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + l\dfrac{\pi}{3} \quad (l \in \mathbb{Z})$

Ta có $(4) \Leftrightarrow \tan x(\tan x - \tan 3x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}.\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\right) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin x.\cos 3x - \cos x.\sin 3x) = 2\cos^2 x.\cos 3x \Leftrightarrow \sin x.\sin(-2x) = 2\cos^2 x.\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x.\cos x = 2\cos^2 x.\cos 3x \Leftrightarrow -\sin^2 x = \cos x.\cos 3x \quad (\text{do } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 5: *(Đề thi tuyển sinh đại học khối D, năm 2003)*

Giải phương trình $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right).\tan^2 x - \cos\dfrac{x}{2} = 0$ *(5)*

Giải.

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right].\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos x\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\sin x)(1-\cos^2 x)}{1-\sin^2 x} - (1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1+\sin x} - (1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left[\frac{1-\cos x}{1+\sin x} - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(-\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1 \\ \tan x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = \pi + k2\pi \quad ; x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 6: *Giải phương trình* $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}(\tan x + \cot 2x)$ *(6)*

Giải.

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$

Ta có: * $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

* $\tan x + \cot 2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x}$

Vậy $(6) \Leftrightarrow \dfrac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

- Có dạng: $a\sin^2 u + b\sin u + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$a\cos^2 u + b\cos u + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$a\tan^2 u + b\tan u + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$a\cot^2 u + b\cot u + c = 0 \quad (a \neq 0)$

- Cách giải: Đặt t = sinu hay t = cosu với $|t| \le 1$

t = tanu (điều kiện $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

t = cotu (điều kiện $u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

Các phương trình trên trở thành $at^2 + bt + c = 0$
Giải phương trình trên tìm được t, so với điều kiện để nhận nghiệm t.
Từ đó giải phương trình lượng giác cơ bản tìm nghiệm của phương trình

Ví dụ 7: *(Đề thi tuyển sinh đại học khối A, năm 2002)*

Tìm các nghiệm trên $(0;2\pi)$ *của phương trình* $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x$ *(7)*

Giải.

Điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$

Ta có $\sin 3x + \cos 3x = (3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) = -3(\cos x - \sin x) + 4(\cos^3 x - \sin^3 x)$

$= (\cos x - \sin x)\left[-3 + 4(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)\right] = (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)$

Do vậy: $(7) \Leftrightarrow 5\left[\sin x + (\cos x - \sin x)\right] = 3 + (2\cos^2 x - 1)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = 2 (loai)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (thỏa mãn điều kiện)

Vì $x \in (0;2\pi)$ nên $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

Ví dụ 8: *(Đề thi tuyển sinh đại học khối A, năm 2005)*

Giải phương trình $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0$ *(8)*

Giải.

$(8) \Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x = 0 \quad (8.1)$

Cách 1: $(8.1) \Leftrightarrow (4\cos^3 2x - 3\cos 2x)\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 2x = 1 \\ \cos^2 2x = -\dfrac{1}{4} \ \text{(vô nghiêm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Cách 2: $(8.1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2} \ \text{(loai)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Cách 3: Phương trình lượng giác không mẫu mực

$$(8.1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 6x = \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = \cos 2x = -1 \end{array}\right.$$

Cách 4: $(8.1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x = \cos 4x = 2$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 9: *(Đề thi tuyển sinh đại học khối D, năm 2005)*

Giải phương trình $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$ *(9)*

Giải.

$$(9) \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left[-\cos 4x + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}\left[1 - 2\sin^2 2x\right] + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 \ \text{(loai)} \end{array}\right.$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 10: *(Đề thi tuyển sinh đại học khối B, năm 2004)*

Giải phương trình $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$ *(10)*

Giải.

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Khi đó: $(10) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \dfrac{3\sin^2 x}{1 + \sin x}$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \text{(nhân do } \sin x \neq \pm 1) \\ \sin x = -2 \ \text{(vô nghiêm)} \end{array}\right.$$

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 11: *(khối A năm 2006)*

Giải phương trình $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ *(11)*

Giải.

Điều kiện $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow 2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=0$$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x=1$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Do điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{5\pi}{4}+m2\pi, m\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 12: *Giải phương trình* $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$ *(12)*

Giải.

Điều kiện $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow \cos x\neq \pm 1$

Chia cả hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ ta được: $3\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}+2\sqrt{2}=(2+3\sqrt{2})\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ (12.1)

Đặt $t=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ ta được phương trình $3t^2-(2+3\sqrt{2})t+2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t=2/3 \end{array}\right.$

- Với $t=\sqrt{2}$ ta có $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x=\sqrt{2}(1-\cos^2 x) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\sqrt{2}\ \text{(loai)} \\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

- Với $t=\dfrac{2}{3}$ ta có $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3\cos x=2(1-\cos^2 x) \Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-2\ \text{(loai)} \\ \cos x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

Kết luận: Kết hợp đ/k được nghiệm của phương trình là

$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\quad x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 13: *Giải phương trình* $\tan^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan x-1$ *(13)*

Giải.

Đặt $t=x-\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+t$.

Khi đó (13) trở thành: $\tan^3 t = \tan\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-1 = \frac{1+\tan t}{1-\tan t}-1$ với $\cos t \neq 0$ và $\tan t \neq 1$

$$\Leftrightarrow \tan^3 t = \frac{2\tan t}{1-\tan t} \Leftrightarrow \tan t(\tan t+1)(\tan^2 t-2\tan t+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan t = 0 \vee \tan t = -1 \quad \text{(nhận so điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi \vee t = -\frac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình (13) là: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

3. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

- Có dạng: $a\sin u + b\cos u = c \qquad (*)$
- Cách giải: Đ/k phương trình có nghiệm: $a^2+b^2 \geq c^2$

Cách 1:

Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$. Đặt $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

với $\alpha\in[0;2\pi]$ thì (*) $\Leftrightarrow \cos\alpha.\sin u+\sin\alpha.\cos u=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(u+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Cách 2:

+ Nếu $u=\pi+k2\pi$ là nghiệm của phương trình (*) thì $a\sin\pi+b\cos\pi=c \Leftrightarrow -b=c$

+ Nếu $u\neq\pi+k2\pi$ đặt $t=\tan\frac{u}{2}$ thì (*) trở thành: $a.\frac{2t}{1+t^2}+b.\frac{1-t^2}{1+t^2}=c$

$$\Leftrightarrow (b+c)t^2-2at+c-b=0$$

Giải phương trình trên tìm được nghiệm t. Từ $t=\tan\frac{u}{2}$ ta tìm được được u

Ví dụ 15: *Tìm* $x\in\left(\frac{2\pi}{5};\frac{6\pi}{7}\right)$ *thỏa mãn phương trình* $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}$ *(15)*

Giải.

Chia cả hai vế phương trình (12) cho 2 ta được $\frac{1}{2}\cos 7x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos 7x-\cos\frac{\pi}{6}\sin 7x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-7x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{54\pi}{84}+k\frac{2\pi}{7} \\ x=\frac{11\pi}{84}+h\frac{2\pi}{7}\end{array}\right. (k,h\in\mathbb{Z})$$

Do $x\in\left(\frac{2\pi}{5};\frac{6\pi}{7}\right)$ nên ta phải có: $\frac{2\pi}{5}\leq\frac{54\pi}{84}+k\frac{2\pi}{7}\leq\frac{6\pi}{7}$ hay $\frac{2\pi}{5}\leq\frac{11\pi}{84}+h\frac{2\pi}{7}\leq\frac{6\pi}{7}$ (k,h $\in\mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ k = 2, h = 1, h = 2

Vậy $x\in\left\{\frac{53\pi}{84};\frac{35\pi}{84};\frac{59\pi}{84}\right\}$

Ví dụ 16: *Giải phương trình* $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$ *(16)*

Giải.

$$(13) \Leftrightarrow \left(3\sin 3x - 4\sin^3 3x\right) - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 17: *Giải phương trình* $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$ *(17)*

Giải.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$

Khi đó: $(17) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 3\frac{\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \Leftrightarrow \sin^2 x - 3\cos^2 x = 4\sin x\cos x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\sqrt{3}\cos x \\ \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin 2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện được nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$; $x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 18: *Giải phương trình* $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ *(18)*

Giải.

$$(18) \Leftrightarrow \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 + \frac{1}{4}\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow\Leftrightarrow (1+\cos 2x)^2 + (1+\sin 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

3. Phương trình đối xứng đối với sinu và cosu

- Có dạng: $a(\sin u + \cos u) + b\sin u\cos u = c$ (*)
- Cách giải: Đặt $t = \sin u + \cos u = \sqrt{2}\cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right)$ với điều kiện $\left|t \leq \sqrt{2}\right|$

$$\Rightarrow \sin u\cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Thay vào PT (*) ta được phương trình: $bt^2 + 2at - (b + 2c) = 0$

Giải phương trình trên tìm được t, rồi so với điều kiện $\left|t \le \sqrt{2}\right|$

Giải phương trình cơ bản $\sqrt{2}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)=t$ ta tìm được nghiệm của phương trình.

<u>Chú ý:</u> Nếu phương trình có dạng: $a(\sin u+\cos u)+b\sin u\cos u=c$ (**)

Thì đặt $t=\sin u-\cos u=\sqrt{2}\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right)$ với điều kiện $\left|t \le \sqrt{2}\right|$

$$\Rightarrow \sin u\cos u=\frac{t^2+1}{2}$$

Ví dụ 19: *Giải phương trình* $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$ *(19)*

Giải.

$$(19) \Leftrightarrow \sin x(1+\sin x)+\cos x\left(1-\sin^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\sin x+\cos x-\sin x\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=-1 & (1)\\ \sin x+\cos x-\sin x\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
- Xét (2): Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t|\le 2$, thì $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó (2) trở thành:

$$t-\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1-\sqrt{2}\\ t=1+\sqrt{2}\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\cos\varphi \quad \left(\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\varphi+h2\pi, h\in\mathbb{Z} \quad (0<\varphi<2\pi)$$

Ví dụ 20: *Giải phương trình* $3\tan^3 x-\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}=8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ *(20)*

Giải.

- Điều kiện: $\cos x\ne 0 \Leftrightarrow \sin x\ne \pm 1$
- Khi đó: $(20) \Leftrightarrow \tan x\left(3\tan^2 x-1\right)+3(1+\sin x)\left(1+\tan^2 x\right)=4\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=4(1+\sin x)$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(3\tan^2 x-1\right)+(1+\sin x)\left(3\left(1+\tan^2 x\right)-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\tan^2 x-1\right)(\tan x+1-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\tan^2 x-1\right)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}3\tan^2 x=1 & (1)\\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \tan^2 x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x=\pm\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

- Giải (2): Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, đ/k $|t|\le\sqrt{2}$ và $t\ne\pm1$

Khi đó (2) có dạng

$$t+\frac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\sqrt{2}\ \left(\text{loại do điều kiện }|t|\le\sqrt{2}\right)\\ t=-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\varphi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\varphi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}-\varphi+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 21: *Giải phương trình* $\cos^3x+\sin^3x=\cos2x$ *(21)*

Giải.

$$(21)\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\cos^2x-\sin^2x$$
$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (1)\\ 1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$
- Giải (2): Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, đ/k $|t|\le\sqrt{2}$ khi đó $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

Phương trình (2) có dạng:

$$1-\frac{t^2-1}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0\Leftrightarrow t=-1$$

Vậy $(2)\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

<u>Chú ý:</u> Phương trình lượng giác có dạng: $a(\tan x\pm\cot x)+b(\tan^2x+\cot^2x)+c=0$ (***)

Ta đặt: $t=\tan x\pm\cot x\Rightarrow t^2=\tan^2x+\cot^2x\pm2$

($t=\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin2x}$, điều kiện $t\ge2$ do $|\sin2x|\le1$)

Ví dụ 22: *Giải phương trình* $3\tan^2x+4\tan x+4\cot x+4\cot^2x+2=0$ *(22)*

Giải.

Đặt $t=\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin2x}$, với điều kiện $|t|\ge2$, ta có $\tan^2x+\cot^2x=t^2-2$

Khi đó phương trình (22) trở thành:

$$3\left(t^2-2\right)+4t+2=0\Leftrightarrow3t^2+4t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}(loai)\\ t=-2\end{array}\right.$$

Ta có

$$t=-2\Leftrightarrow\frac{2}{2\sin x}=-2\Leftrightarrow\sin2x=-1$$
$$\Leftrightarrow2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

5. Phương trình đẳng cấp

- Có dạng: $a\sin^2 u + b\sin u\cos u + c\cos^2 u = d$
- Cách giải:

* Kiểm tra xem cosu = o có thỏa mãn phương trinh hay không (nếu thỏa mãn thì $u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm)

* Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 u \neq 0$, ta được phương trình

$$a\tan^2 u + b\tan u + c = d(1+\tan^2 u)$$

Đặt t = tanu ta có phương trình: $(a-d)t^2 + bt + c - d = 0$

Giải phương trình trên tìm được t = tanu.

***Ví dụ 23:** Giải phương trình* $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$ *(23)*

Giải.

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia cả hai vế của (23) cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được

$$(23) \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{3}\tan x = \left(1+\tan^2 x\right) + \tan^2 x$$

Đặt $t = \tan x$ ta có phương trình: $2t^2 + 2\sqrt{3}t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy $(23) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

***Ví dụ 24:** Giải phương trình* $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0$ *(24)*

Giải.

Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $\cos x = 0$ và $\sin x = \pm 1$ thì phương trình (23) vô nghiệm

Do $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của (23) cho $\cos^3 x$ ta có:

$$(23) \Leftrightarrow 1 - 4\tan^4 x - 3\tan^2 x + \tan x\left(1+\tan^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)\left(3\tan^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

***Ví dụ 25:** Cho phương trình*

$$(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0 \qquad (25)$$

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Tìm m *để phương trình (23) có duy nhất nghiệm trên* $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Giải.

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ thì $\cos x=0$ và $\sin x=\pm1$ nên phương trình (23) thành

$$\pm(4-6m)\pm3(2m-1)=0 \Leftrightarrow 1=0 \quad \text{vô nghiệm}$$

Chia cà hai vế của phương trình cho $\cos^3 x\neq 0$ thì

$$(4-6m)\tan^3 x+3(2m-1)\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+2(m-2)\tan^2 x-(4m-3)\left(1+\tan^2 x\right)=0$$

Đặt $t=\tan x$ ta được phương trình:

$$t^3-(2m+1)t^2+3(2m-1)t-4m+3=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2-2mt+4m-3\right)=0 \qquad (*)$$

a) Khi $m=2$ thì (* trở thành $(t-1)\left(t^2-4t+5\right)=0 \Leftrightarrow t=1$

$$\Rightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

b) Ta có $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thì $\tan x=t\in[0;1]$. Xét phương trình $t^2-2mt+4m-3=0$ (*)

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-3}{t-2}=2m \quad \text{(do t = 2 không là nghiệm)}$$

Đặt $y=f(t)=\frac{t^2-2}{t-2}$ (C) và (d): $y=2m$

Ta có $y'=f'(t)=\frac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}$

t	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		+		+		-		-		+	
y			$\frac{3}{2}$	↗	2				‖		

Do (*) luôn có nghiệm trong $t=1\in[0;1]$ nên yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(d): y=2m \text{ không có điểm chung với (C)}\\ (d) \text{ cắt (C) tại một điểm duy nhất } t=1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2m<\frac{3}{2}\\ 2m\geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<\frac{3}{4}\\ m\geq 1\end{array}\right.$$